

ANALYSE DE LA MORTALITE DES PENSIONNES
DU SECTEUR PUBLIC

Projet SSTC-Agora

Etude réalisée sous la direction de
Jean-Pierre Delville* et Johan Janssens*

Promoteur: Michel Denuit[‡]

Auteur: Antoine Delwarde[‡]

*Administration des Pensions

[‡]Institut de Statistique et Institut des Sciences Actuarielles

Université catholique de Louvain

Louvain-la-Neuve

Juin 2004

Table des matières

1	Tables prospectives belges	4
1.1	Données	4
1.2	Fermeture des tables	4
1.2.1	Motivation	4
1.2.2	Technique de fermeture	4
1.2.3	Résultats	5
1.3	Méthode de Lee-Carter	5
1.3.1	Modèle	5
1.3.2	Estimation des paramètres	8
1.4	Méthode de Lee-Carter avec tendance temporelle linéaire	11
1.4.1	Modèle	11
1.4.2	Estimation des paramètres	11
1.5	Tables prospectives	14
2	Tables prospectives spécifiques au secteur public	16
2.1	Analyse de la base de données du secteur public	16
2.1.1	Présentation	16
2.1.2	Pensions de retraite	17
2.1.3	Pensions de survie	23
2.1.4	Taux de mortalité et espérances de vie	24
2.2	Modèle d'antisélection	27
2.3	Espérances de vie ajustées	31
3	La mortalité comme paramètre d'Exsyspen	32
3.1	Présentation d'Exsyspen	32
3.2	Impact des tables de mortalité sur les simulations d'Exsyspen	32
4	Calcul des cotisations sociales imputées	37
4.1	Introduction	37
4.2	Méthodes pouvant être utilisées	37
4.2.1	Méthode des prestations payées	37
4.2.2	Méthode des prestations payées avec facteur de correction pour les pensions	38
4.2.3	Méthode de la part de salaire	38
4.2.4	Estimation entièrement actuarielle	38
4.3	Estimation actuarielle: <i>Aggregate Cost Method</i>	38
4.3.1	Modèle de base	38
4.3.2	Cadeau de la première génération	39
4.4	Application	40
4.5	Conclusions	42

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	2
A Hypothèse sur la répartition des décès dans l'année	45
B Décomposition en valeurs singulières	46
C Comparaison des scénarios	48
C.1 Nombre de pensions	49
C.2 Montant des pensions (millions d'euros)	50
D Taux de cotisation	51

Introduction

L'Administration des Pensions du Ministère des Finances (rebaptisé depuis peu Service Public Fédéral Finances) a pour mission de calculer et de gérer les pensions inhérentes aux employés du service public belge. Dans cette optique, ce département a développé voici quelques années un outil de simulation nommé Exsyspen, en collaboration avec la société *Siemens Nixdorf Information Systems*. Ce logiciel, basé sur un nombre important d'hypothèses socio-économiques et politiques, permet d'établir des prévisions quant à l'évolution du nombre et de la charge des pensions du service public.

Afin d'obtenir un oeil neuf et critique sur Exsyspen, l'Administration des Pensions a fait appel à une équipe de l'Université Catholique de Louvain. L'objectif était donc d'analyser les hypothèses propres du logiciel, et plus particulièrement celles relatives à la mortalité. En effet, s'agissant de prévisions de pensions, il est nécessaire de recourir à des tables de mortalité prospectives. Or, les tables de base utilisées lors de l'entrée en vigueur du projet dataient déjà de quelques années (tables prospectives INS 1995). L'un des buts de l'analyse était donc de fournir des tables plus récentes, voire plus appropriées à la population étudiée.

L'étude se compose de quatre chapitres.

Le premier chapitre explique comment, à partir de données propres à la population belge générale, il est possible de construire des tables de mortalité prospectives. La méthode utilisée est celle de Lee-Carter, dont les avantages ne sont plus à démontrer. Cette technique a été appliquée avec succès sur de nombreuses populations très diverses.

Le second chapitre débute sur une brève analyse descriptive de la base de données de l'Administration des Pensions. Ensuite, nous expliquons comment adapter la table prospective belge construite précédemment à ces données particulières. Il est en effet illusoire de vouloir utiliser telle quelle la méthode de Lee-Carter directement sur les pensionnés du secteur public, vu leur nombre trop peu élevé.

Le troisième chapitre analyse l'impact de la table de mortalité sur les projections d'Exsyspen. Nous comparons ainsi trois tables prospectives différentes et mettons en évidence les disparités dans les résultats.

Enfin, le quatrième chapitre traite d'une application directe de l'outil Exsyspen. Il nous était demandé d'estimer un taux pour les cotisations sociales imputées, lesquelles sont définies en introduction du chapitre. L'objectif était de calculer ce taux d'une manière *actuariellement acceptable* et de le comparer aux estimations plus directes effectuées dans le cadre d'un système en répartition. Nous avons donc tenté de développer la technique dite de l'*Aggregate Cost*.

En dernier lieu, il convient de signaler que ce projet est en nombreux points comparable à une étude en cours à Québec, Canada. Sous la direction d'Hélène Cossette et Etienne Marceau, tous deux membres de l'Ecole d'Actuariat de l'Université Laval, l'objectif de cette mission est d'analyser la mortalité des rentiers de la Régie des Rentes du Québec. Au vu des nombreux traits de similitude entre les deux projets, il nous a semblé opportun de mettre en commun nos réflexions et approches. Il nous ainsi été donné l'opportunité d'effectuer cette opération fructueuse par le biais d'une mission d'une semaine à Québec.

Chapitre 1

Tables prospectives belges

1.1 Données

Le but de ce chapitre est de construire, séparément pour chacun des deux sexes, une table de mortalité prospective propre à la population belge. Pour ce faire, nous disposons pour chaque sexe de tableaux composés du nombre de décès observés $d_x(t)$ et du nombre d'individus recensés au premier janvier $l_x(t)$, pour les années 1950 à 2000. La fourchette d'âges court de 0 à 84 avant 1960, et de 0 à 98 ans à partir de 1961. Ces données se trouvent sur une disquette en annexe, tout comme l'entièreté des programmes SAS utilisés dans cette étude. Cette disquette a été remise à Messieurs Janssens et Delville.

À l'aide de ces tableaux et des formules obtenues à partir de l'hypothèse de constance par morceaux des taux de mortalité (voir Annexe A), il nous est possible de construire une estimation des quotients $\tilde{q}_x(t)$, taux $\tilde{\mu}_x(t)$, et expositions au risque $\tilde{L}_x(t)$.

1.2 Fermeture des tables

1.2.1 Motivation

Dans l'établissement de tables de mortalité, il est de coutume de fermer les tableaux utilisés, c'est-à-dire de les étendre à des âges avancés. Dans notre situation, deux raisons nous poussent à utiliser cette approche. Tout d'abord, nous ne possédons aucune information sur la mortalité des plus de 98 ans, et il serait saugrenu de construire des tables qui ne prennent pas ces individus en compte. Ensuite, les tableaux que nous utilisons ne sont pas rectangulaires (rappelons que l'âge maximal observé varie de 84 ans avant 1960 à 98 après). Par ailleurs, nous verrons dans le chapitre suivant qu'une telle propriété est indispensable pour l'utilisation du modèle de Lee-Carter.

1.2.2 Technique de fermeture

Nous utilisons une technique de fermeture basée sur un modèle de régression avec contraintes. Pour t fixé,

$$\ln \tilde{q}_x(t) = a_t + b_t x + c_t x^2 + \epsilon_{xt} \quad (1.1)$$

$$\tilde{q}_{130}(t) = 1 \quad (1.2)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{q}_x(t)}{\partial x} \right|_{x=130} = 0 \quad (1.3)$$

pour $x \geq 75$, avec ϵ_{xt} des erreurs indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $N(0, \sigma^2)$.

La contrainte (1.2) impose un quotient de mortalité unitaire à 130 ans. En d'autres termes, la table de mortalité n'autorise personne à rester en vie au-delà de cet âge.

La contrainte (1.3) permet de contrôler l'allure de la courbe des quotients de mortalité aux très grands âges. En pratique, par cet artifice, nous imposons un changement de concavité: de forme convexe jusqu'à une centaine d'année, la courbe devient concave au-delà et atteint un maximum à 130 ans.

Remarquons que les contraintes (1.2) et (1.3) mènent respectivement à

$$a_t + 130b_t + 130^2c_t = 0$$

et

$$b_t + 260c_t = 0$$

de sorte que le modèle de régression (1.1) se réécrit

$$\ln \tilde{q}_x(t) = c_t(130^2 - 260x + x^2) + \epsilon_{xt}. \quad (1.4)$$

Nous choisissons de remplacer les quotients observés $\tilde{q}_x(t)$ par leurs homologues issus de la régression à partir de $x = 85$ ans. Finalement, les $\tilde{q}_x(t)$ ainsi obtenus sont lissés par moyenne mobile afin d'éviter toute cassure à l'âge de transition:

$$\begin{aligned} \hat{q}_x(t) &= \tilde{q}_x(t) \text{ pour } x \in [0, 79] \\ \hat{q}_x(t) &= [\tilde{q}_{x-2}(t)\tilde{q}_{x-1}(t)\tilde{q}_x(t)\tilde{q}_{x+1}(t)\tilde{q}_{x+2}(t)]^{\frac{1}{5}} \text{ pour } x \in [80, 90] \\ \hat{q}_x(t) &= \tilde{q}_x(t) \text{ pour } x \in [91, 125]. \end{aligned}$$

Il est maintenant facile de reconstruire des taux $\hat{\mu}_x(t)$ et expositions au risque $\hat{L}_x(t)$ quelques soient $x \in \{x_{min}, \dots, x_{max}\} = \{0, \dots, 130\}$ et $t \in \{t_{min}, \dots, t_{max}\} = \{1950, \dots, 2000\}$.

1.2.3 Résultats

Il est bon de signaler que la contrainte (1.2) qui impose $q_{130}(t) = 1$ est incompatible avec la formule (A.2). En effet, nous aurions $\mu_{130}(t) = -\ln(1 - q_{130}(t)) = +\infty$. C'est la raison pour laquelle nous nous contenterons de traiter les âges inférieurs à 125 ans dans les sections suivantes. Par ailleurs, nous constaterons que la population étudiée par après (le secteur public) ne présente pas d'individu au-delà de cet âge.

La Figure 1.1 représente les quotients de mortalité avant et après fermeture en 1960, 1980 et 2000. La partie concave en fin de vie y est notamment bien visible.

La Figure 1.2 regroupe pour sa part les taux de mortalité fermés pour ces trois années.

1.3 Méthode de Lee-Carter

1.3.1 Modèle

La méthode de Lee-Carter consiste à scinder la mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle, et ensuite à extrapoler cette dernière dans le futur. L'idée est donc de décomposer l'estimation brute $\hat{\mu}_x(t)$ de $\mu_x(t)$ comme suit:

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_{xt} \quad (1.5)$$

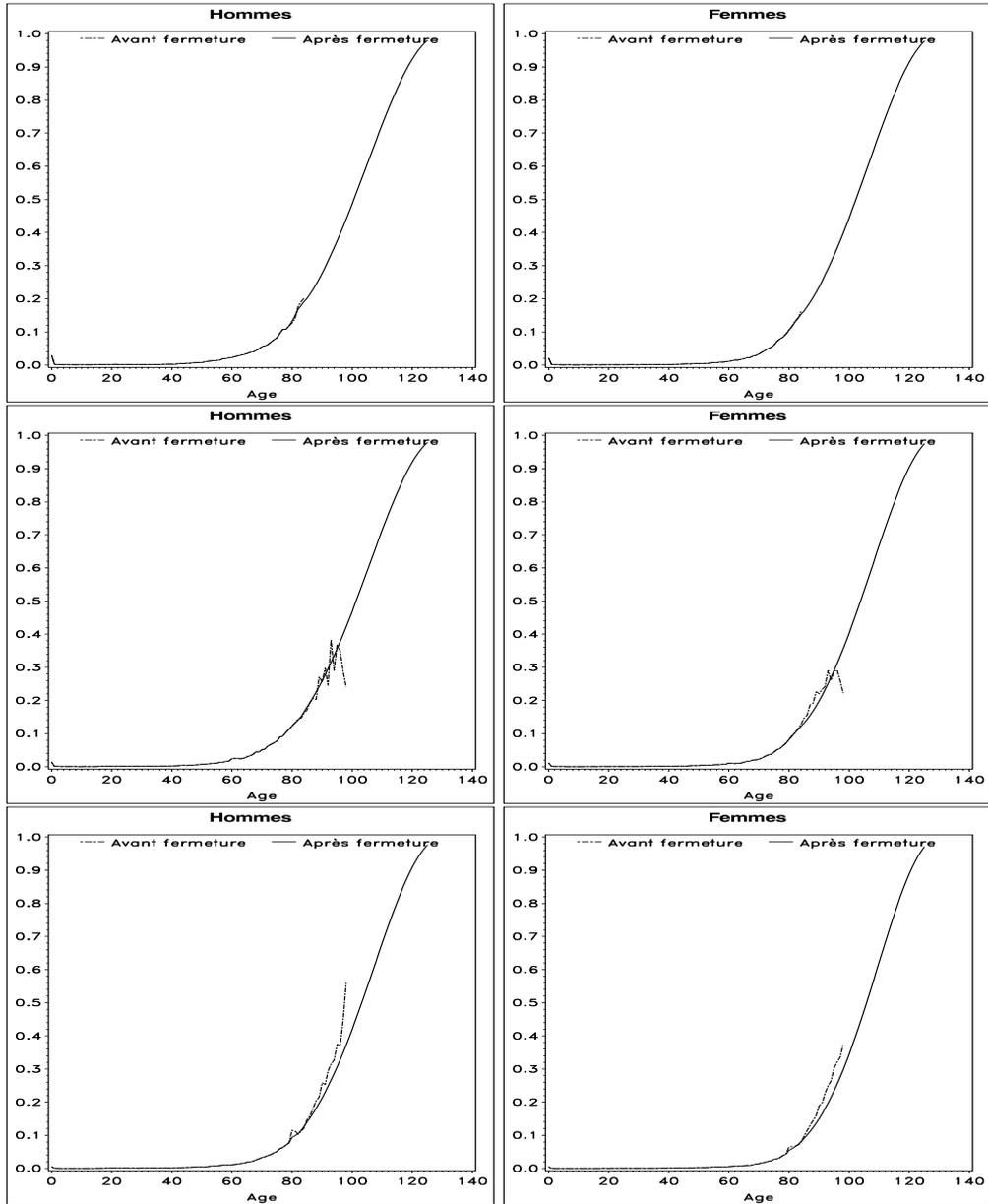


FIG. 1.1 – Fermeture des quotients de mortalité pour les années 1960, 1980 et 2000 (respectivement de haut en bas).

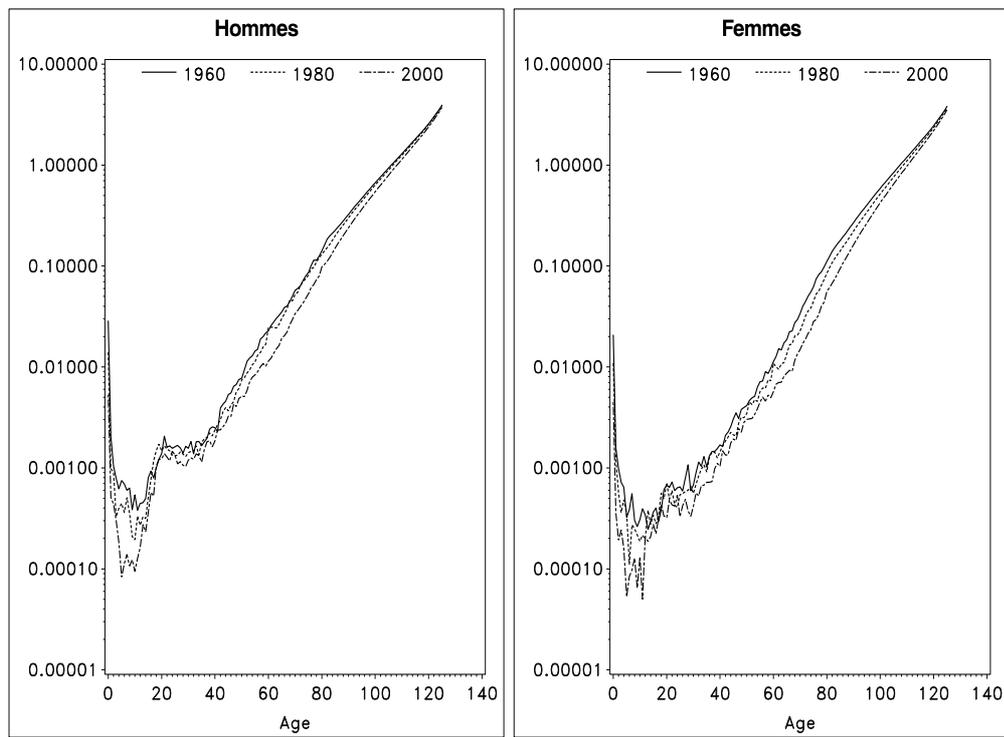


FIG. 1.2 – Fermeture des taux de mortalité.

où les erreurs ϵ_{xt} sont supposées indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $N(0, \sigma^2)$ et où les paramètres β_x et κ_t satisfont aux contraintes

$$\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t = 0 \text{ et } \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x = 1 \quad (1.6)$$

garantissant l'identifiabilité¹ du modèle.

Le modèle (1.5) décompose donc l'évolution des taux instantanés de mortalité en différentes composantes, dont il est bon de saisir précisément la signification:

α_x : décrit le comportement moyen des $\mu_x(t)$ au cours du temps (sur l'échelle logarithmique);
 β_x : décrit (toujours sur l'échelle logarithmique) l'écart des $\mu_x(t)$ par rapport au comportement moyen α_x puisque

$$\frac{d}{dt} \ln \mu_x(t) = \beta_x \frac{d}{dt} \kappa_t.$$

Les âges x pour lesquels β_x est grand (en valeur absolue) seront donc très sensibles à l'évolution temporelle. Si les κ_t sont (approximativement) linéaires, $d\kappa_t/dt$ est constant et les taux de mortalité $\mu_x(t)$ présentent une décroissance exponentielle à un taux constant.

κ_t : décrit l'évolution de la mortalité au cours du temps.

L'avantage de cette méthode est de réduire le problème de la projection de la mortalité à l'étude de la série chronologique univariée $\{\kappa_t, t = t_{\min}, t_{\min} + 1, \dots, t_{\max}\}$.

1.3.2 Estimation des paramètres

Il est clair que le modèle (1.5) ne peut pas être ajusté par une simple régression linéaire, puisqu'il n'y a pas de variables observables dans le membre de droite de (1.5). L'estimation des paramètres s'effectue par la méthode des moindres carrés ordinaire, c'est-à-dire en résolvant le problème d'optimisation

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \arg \min_{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t} \sum_{x,t} \left(\ln \hat{\mu}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t \right)^2 \quad (1.7)$$

Une solution de (1.7) existe et est fournie par la méthode de décomposition aux valeurs singulières. Cette solution est unique grâce aux contraintes (1.6).

L'estimation des paramètres α_x , β_x et κ_t se décompose en les étapes suivantes:

Etape 1 Estimation des α_x par les moyennes des $\ln \hat{\mu}_x(t)$ au cours du temps, i.e.

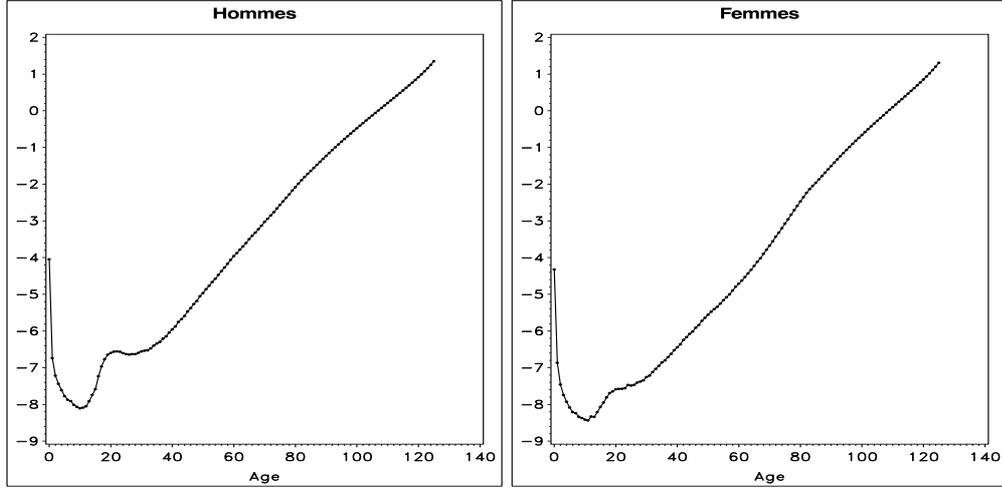
$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min} + 1} \ln \left\{ \prod_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \hat{\mu}_x(t) \right\}.$$

Ceci se justifie par le fait que l'annulation de la dérivée de (1.7) par rapport à α_x donne

$$\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \ln \hat{\mu}_x(t) = (x_{\max} - x_{\min} + 1) \alpha_x + \beta_x \underbrace{\sum_{t=t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t}_{=0 \text{ en vertu de la contrainte (1.6)}}.$$

La Figure 1.3 reprend l'estimation des paramètres α_x pour la population belge. On y remarque facilement les caractéristiques habituelles de ce type de graphique: la mortalité infantile, la bosse-accidents plus marquée chez les hommes que chez les femmes, et dès 30 ans, une croissance constante de la mortalité avec l'âge.

1. Rappelons qu'un modèle est identifiable lorsqu'il n'est pas possible de trouver deux jeux de paramètres distincts conduisant au même modèle. Le modèle (1.5) n'est pas identifiable si on ne formule pas de conditions supplémentaires (telles (1.6)), notamment car si on remplace β_x et κ_t par $c\beta_x$ et κ_t/c , quel que soit $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, on obtient le même modèle.


 FIG. 1.3 – Estimation des α_x .

Etape 2 Calcul de la matrice \mathbf{Z} de dimension $(x_{\max} - x_{\min} + 1) \times (t_{\max} - t_{\min} + 1)$ dont l'élément (x, t) , noté z_{xt} , est donné par

$$z_{xt} = \ln \hat{\mu}_x(t) - \hat{\alpha}_x.$$

Il s'agit donc d'un centrage des $\ln \hat{\mu}_x(t)$ par rapport à leur moyenne temporelle.

Il faut alors approximer \mathbf{Z} de manière optimale (aux sens des moindres carrés ordinaires, i.e. en minimisant $\sum_{x,t} (z_{xt} - \beta_x \kappa_t)^2$) par le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne

$$\mathbf{Z} \approx \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\kappa}}^t \quad (1.8)$$

avec $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_{x_{\min}}, \dots, \hat{\beta}_{x_{\max}})^t$ et $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = (\hat{\kappa}_{t_{\min}}, \dots, \hat{\kappa}_{t_{\max}})^t$. La résolution de ce problème est directe en passant par la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{Z} . L'Annexe B explique les détails de cette décomposition.

Les Figures 1.4 et 1.5 reprennent l'estimation des paramètres β_x et κ_t pour la population belge. On y remarque des $\hat{\kappa}_t$ décroissants, indiquant une diminution de la mortalité avec le temps. Cette chute des taux de mortalité est surtout perceptible chez les jeunes personnes ($\hat{\beta}_x$ importants). Au contraire, l'évolution est de plus en plus faible dès que l'on dépasse l'âge de 60 ans. A la limite, les taux de mortalité restent approximativement constants dans le temps lorsque l'on arrive aux âges extrêmes. Ce résultat est la conséquence logique de la contrainte (1.2) qui suppose un quotient de mortalité à 130 ans identique quelle que soit l'année t .

Etape 3 Pour terminer, nous procédons à un second ajustement des $\hat{\kappa}_t$ afin que le nombre total de décès recensés chaque année corresponde à celui fourni par (1.5) étant donnés les $\hat{\alpha}_x$ et $\hat{\beta}_x$. Il faut donc exiger, $\forall t \in \{t_{\min}, \dots, t_{\max}\}$,

$$\sum_x d_x(t) = \sum_x \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t) \hat{L}_x(t). \quad (1.9)$$

La Figure 1.6 compare les valeurs estimées puis réestimées des paramètres κ_t pour la population belge.

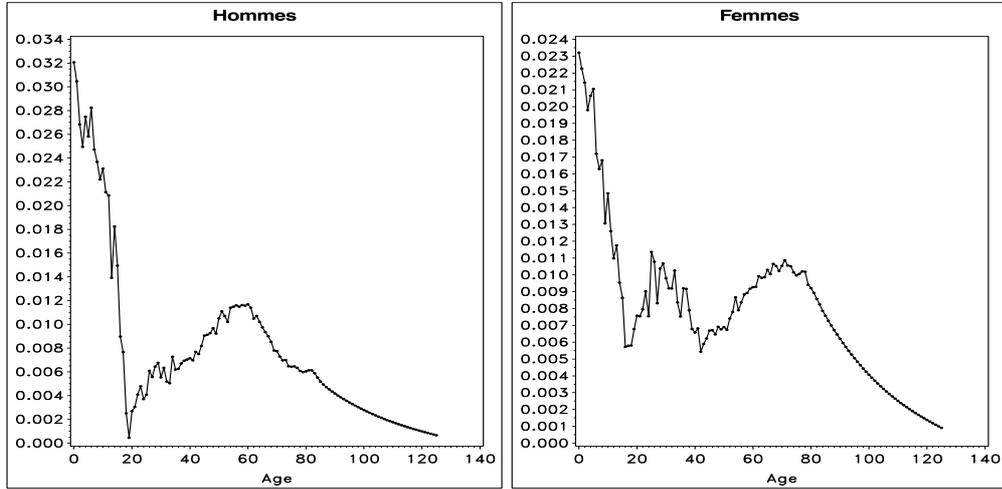


FIG. 1.4 – Estimation des β_x .

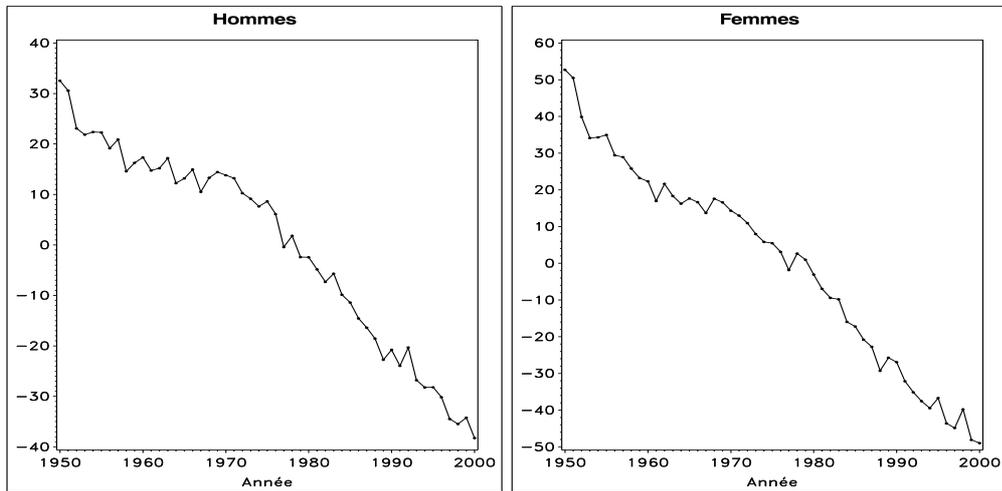


FIG. 1.5 – Estimation des κ_t .

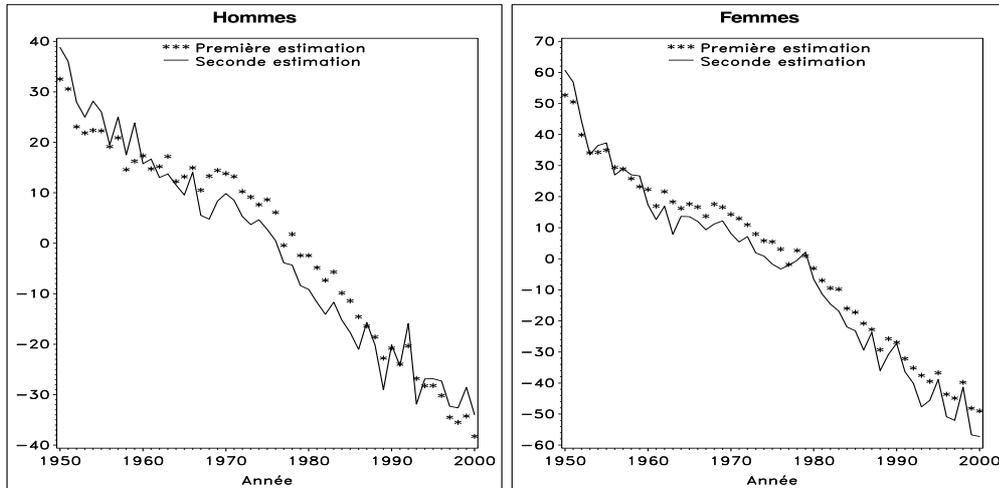


FIG. 1.6 – Réestimation des κ_t .

1.4 Méthode de Lee-Carter avec tendance temporelle linéaire

1.4.1 Modèle

Comme nous pouvons le constater sur la Figure 1.6, la série des estimations des κ_t est approximativement linéaire à partir des années 70. Il est donc judicieux de simplifier quelque peu le modèle (1.5) en y imposant une tendance linéaire temporelle:

$$\ln \hat{\mu}_x(t) = \alpha_x + \beta_x t_c + \epsilon_{xt} \quad (1.10)$$

où les erreurs ϵ_{xt} sont toujours supposées indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $N(0, \sigma^2)$. Les t_c sont une version centrée du temps calendaire (pour rester cohérent avec la première contrainte (1.6)):

$$t_c = t - \bar{t} \text{ avec } \bar{t} = \frac{t_{min} + t_{max}}{2}.$$

Les résultats d'un tel modèle sont cependant fortement dépendants de la période temporelle prise en considération. Il est donc judicieux, dans un premier temps, d'estimer la période optimale d'ajustement.

Nous choisissons la première année d'observation t_{min}^* en maximisant le R^2 d'une régression linéaire sur les κ_t réajustés par (1.9):

$$t_{min}^* = \arg \max_t R_t^2$$

où R_t^2 est le R^2 de la régression sur la période $[t, t_{max}]$.

Nous trouvons $t_{min}^* = 1970$ pour les hommes et 1968 pour les femmes. Le modèle à tendance temporelle linéaire utilisera donc 31 années d'observation pour les hommes et 33 pour les femmes.

1.4.2 Estimation des paramètres

L'estimation s'effectue via la procédure *genmod* de SAS. Les Figures 1.7 et 1.8 rendent compte des résultats obtenus pour la population belge.

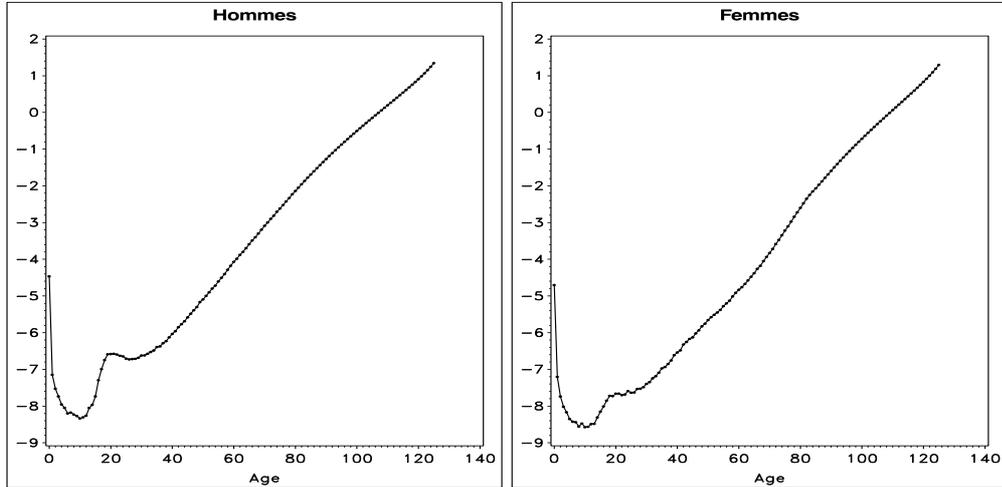


FIG. 1.7 – Estimation des α_x pour le modèle à tendance temporelle linéaire.

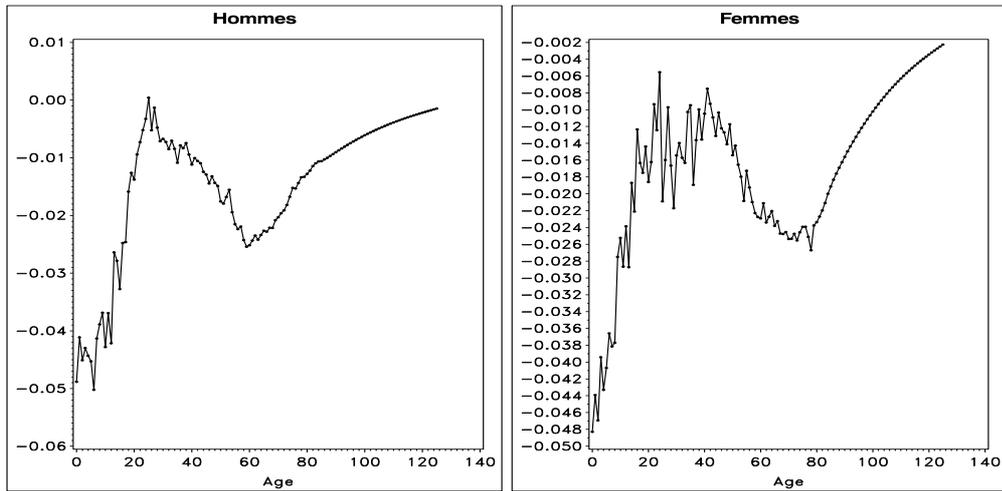


FIG. 1.8 – Estimation des β_x pour le modèle à tendance temporelle linéaire.

Remarquons que le signe des $\widehat{\beta}_x$ est inversé par rapport à la Figure 1.4. Ceci est la conséquence d'une tendance temporelle linéaire croissante, alors que les $\widehat{\kappa}_t$ étaient décroissants dans le modèle général.

1.5 Tables prospectives

Il est maintenant possible de reconstruire des taux de mortalité pour $t > 2000$ à partir des formules

$$\hat{\mu}_x(t) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x t_c) \quad (1.11)$$

et

$$t_c = t - \frac{t_{min}^* + t_{max}}{2}. \quad (1.12)$$

La Figure 1.9 montre les $\hat{\mu}_x(t)$ recomposés pour les années 1980, 2000 et 2020.

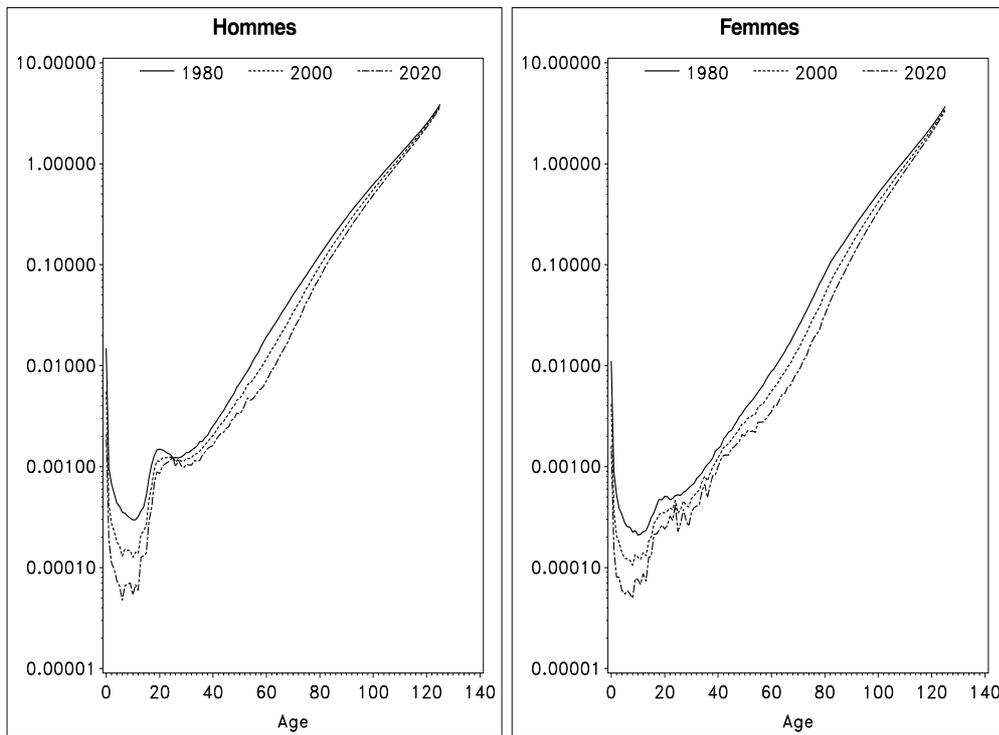


FIG. 1.9 – *Recomposition des taux de mortalité.*

La Figure 1.10 expose pour sa part les taux de mortalité observés et projetés à 0, 30, 60 et 90 ans.

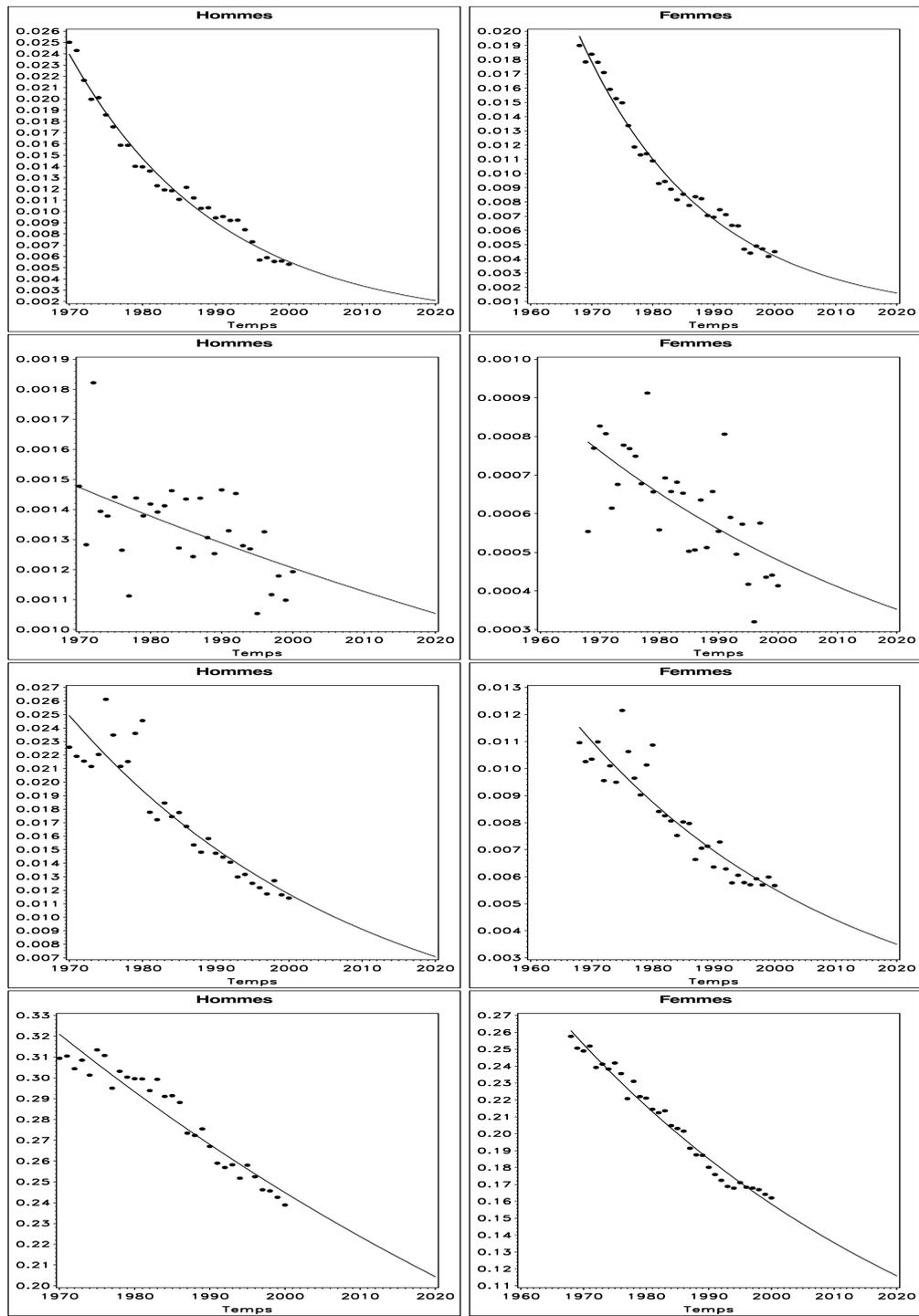


FIG. 1.10 – *Recomposition des taux de mortalité pour les âges 0, 30, 60 et 90 (respectivement de haut en bas).*

Chapitre 2

Tables prospectives spécifiques au secteur public

L'objectif de ce chapitre est de construire des tables de mortalité prospectives propres à des sous-populations belges particulières. Pour ce faire, nous disposons d'une base de données relative aux retraités du secteur public belge. Les individus jouissant d'une pension de survie ne seront quant à eux pas classés par variable, cette distinction nous paraissant injustifiée.

2.1 Analyse de la base de données du secteur public

2.1.1 Présentation

Le fichier de données est issu de la base de données ORAP de l'Administration des Pensions et couvre cinq années, de 1998 à 2002. La requête SQL utilisé se trouve en annexe.

Chacune des lignes du fichier reprend certaines caractéristiques individuelles d'un retraité du secteur public:

- le numéro de registre national
- le sexe
- l'année
- l'âge au premier janvier
- la date de naissance
- la date (éventuelle) de décès
- l'âge (éventuel) au décès
- le code postal de l'adresse
- la langue (néerlandais, français/allemand)
- l'état civil (marié, veuf, divorcé/séparé, célibataire)
- le motif de la mise à la pension (limite d'âge, inaptitude physique, anticipation sur demande, autre)
- l'âge de mise à la pension
- une variable binaire indiquant si l'individu est retraité de l'enseignement ou non
- une variable binaire indiquant si l'individu est décédé cette année ou pas.

2.1.2 Pensions de retraite

Les Figures 2.1 à 2.7 rendent compte graphiquement de la composition de certaines variables pour les retraités. Les Tables 2.1 et 2.2 reprennent pour leur part les détails, en chiffres absolus pour la première et en pourcentages pour la seconde.

Variable	Valeur	1998	1999	2000	2001	2002
Sexe	Homme	127 750	130 919	133 854	135 961	138 033
	Femme	56 945	60 328	64 060	67 264	70 555
Langue	Néerlandais	104 441	108 400	112 203	115 417	118 783
	Français/Allemand	80 254	82 847	85 711	87 808	89 805
Enseignement	Non	112 772	115 286	117 473	118 981	120 425
	Oui	71 923	75 961	80 441	84 244	88 163
Etat civil	Marié	135 085	140 474	146 479	151 933	157 533
	Veuf	23 512	25 829	27 575	28 659	29 701
	Divorcé/Séparé	10 301	11 451	12 760	14 085	15 496
	Célibataire	15 797	13 493	11 090	8 548	5 858
Motif	Limite d'âge	40 218	41 347	41 146	40 355	39 536
	Inaptitude physique	31 151	33 841	36 597	38 660	40 554
	Anticipation sur demande	90 357	96 705	102 150	106 525	111 352
	Autre motif	22 969	19 354	18 021	17 685	17 146
Total		184 695	191 247	197 914	203 225	208 588

TAB. 2.1 – Composition des classes: retraites (en chiffres absolus).

Variable	Valeur	1998	1999	2000	2001	2002
Sexe	Homme	69.17%	68.46%	67.63%	66.90%	66.17%
	Femme	30.83%	31.54%	32.37%	33.10%	33.83%
Langue	Néerlandais	56.55%	56.68%	56.69%	56.79%	56.95%
	Français/Allemand	43.45%	43.32%	43.31%	43.21%	43.05%
Enseignement	Non	61.06%	60.28%	59.36%	58.55%	57.73%
	Oui	38.94%	39.72%	40.64%	41.45%	42.27%
Etat civil	Marié	73.14%	73.45%	74.01%	74.76%	75.52%
	Veuf	12.73%	13.51%	13.93%	14.10%	14.24%
	Divorcé/Séparé	5.58%	5.99%	6.45%	6.93%	7.43%
	Célibataire	8.55%	7.06%	5.60%	4.21%	2.81%
Motif	Limite d'âge	21.78%	21.62%	20.79%	19.86%	18.95%
	Inaptitude physique	16.87%	17.69%	18.49%	19.02%	19.44%
	Anticipation sur demande	48.92%	50.57%	51.61%	52.42%	53.38%
	Autre motif	12.44%	10.12%	9.11%	8.70%	8.22%
Total		100%	100%	100%	100%	100%

TAB. 2.2 – Composition des classes: retraites (en %).

D'une manière générale, la population observée augmente au fil des années pour passer de 184 695 individus en 1998 à 208 588 en 2002. Le plus vieil individu recensé est né en mars 1895, tandis que le plus jeune n'a vu le jour qu'en février 1977. Rappelons que le fichier de données reprend toutes les personnes recensées dans la base de données et ayant vécu en tant que retraité(e) au moins un jour entre le 1^{er} janvier 1998 et le 31 décembre 2002.

La proportion de femmes est en croissance continue, et dépasse 30% en 2002.

La langue est celle de la correspondance. Vu le faible nombre de retraités germanophones (moins de 0.1% de l'effectif total), nous choisissons les grouper avec les francophones, plus proches d'eux que les néerlandophones d'un point de vue géographique. Ces derniers représentent toutefois plus de 56% de la population totale.

Puisqu'il semble de notoriété publique que les retraités issus du corps enseignant jouissent

d'une mortalité plus faible que la moyenne belge, il nous a semblé judicieux d'analyser cette variable. Les retraites de l'enseignement représentent environ 40% de notre base de données et sont en légère croissance sur la période d'observation.

Les mariés, avec plus de 70% de la population totale, sont de loin l'état civil le plus représenté. Les trois autres catégories se partagent les 30% restant. Cette constatation doit cependant être nuancée.

Il ressort d'analyses plus approfondies que la proportion de retraités mariés serait de l'ordre de 65% (50% si l'on considère également les pensions de survie). Toute requête SQL croisant des tables différentes engendre des pertes d'information. Dans notre cas, il semble donc que la population perdue soit constituée principalement de personnes non mariées. Cette remarque nous incite à la prudence pour la considération de la variable *état civil*.

La moitié des retraités l'ont été anticipativement du fait de leur demande. Près de 20 % ont atteint la limite d'âge, et une même proportion a été déclarée invalide ou physiquement inapte au service. La pyramide des âges à la retraite (Figure 2.7) montre clairement que les femmes prennent leur retraite à un âge moins avancé que les hommes.

Tout comme pour l'âge à la retraite, il existe une différence flagrante entre la répartition des âges au décès des hommes et des femmes (Figure 2.8). La pyramide féminine est en effet beaucoup moins échanquée que son homologue masculine. Si cette observation est tout à fait courante pour les âges avancés (les femmes ayant tendance à décéder plus tard que les hommes), elle l'est toutefois beaucoup moins avant 60 ans, où l'on observe une surmortalité féminine. Observons finalement que le retraité décédé le plus jeune avait 36 ans, le plus vieux 103 ans.

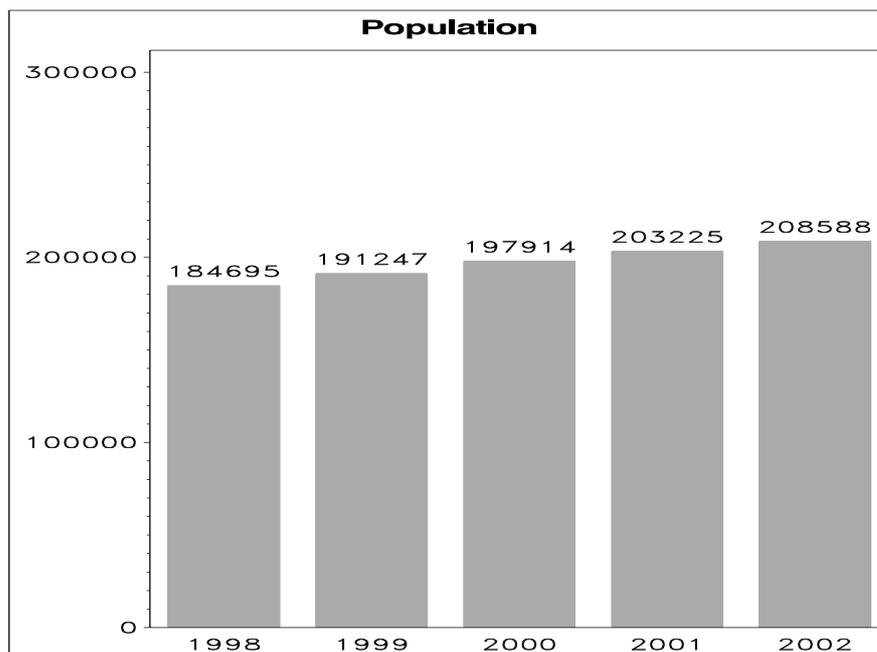


FIG. 2.1 – Évolution de la population totale.

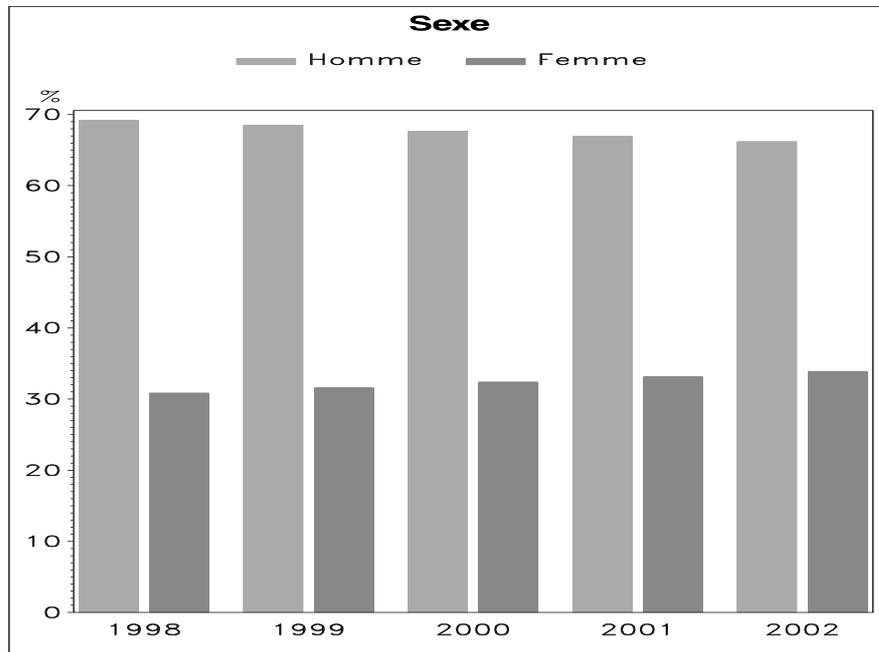


FIG. 2.2 – Répartition de chacun des deux sexes.

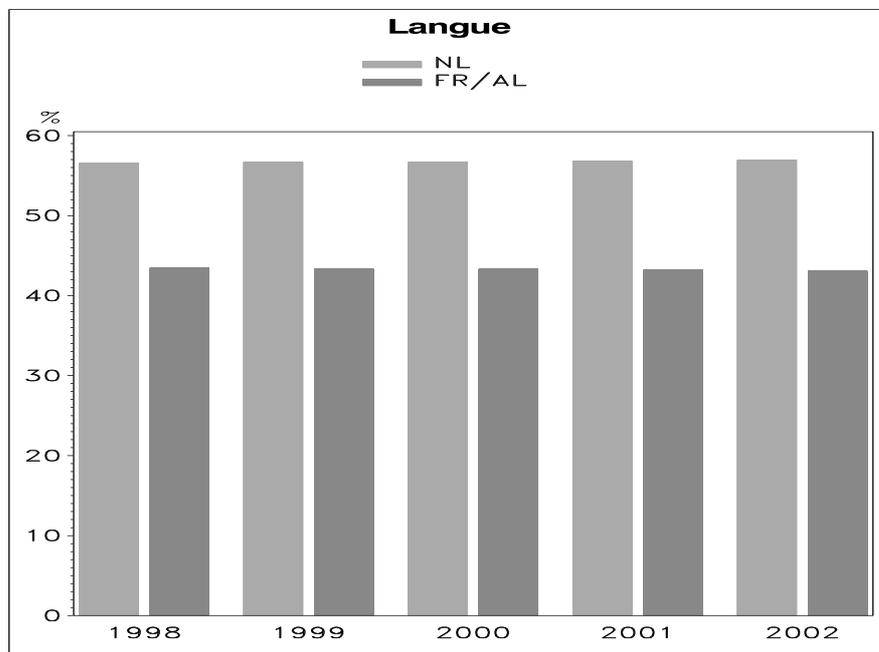


FIG. 2.3 – Répartition des langues.

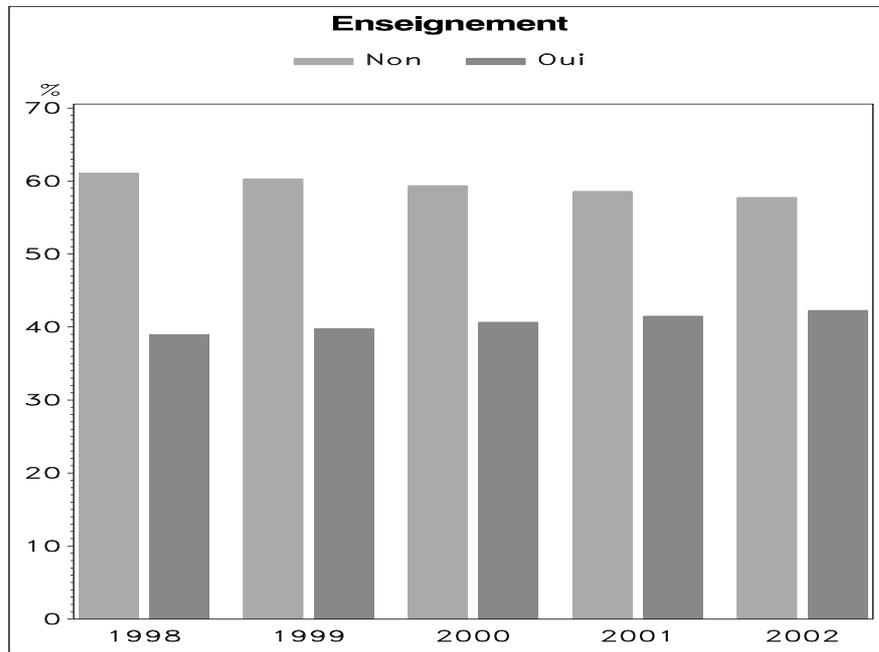


FIG. 2.4 – Proportion d'enseignants.

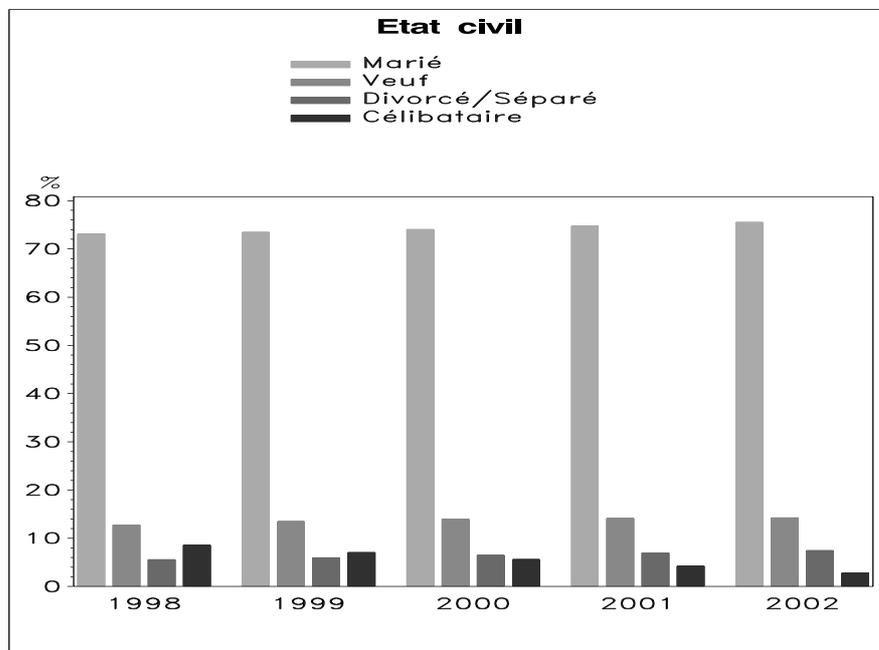


FIG. 2.5 – Répartition des quatre catégories d'état civil.

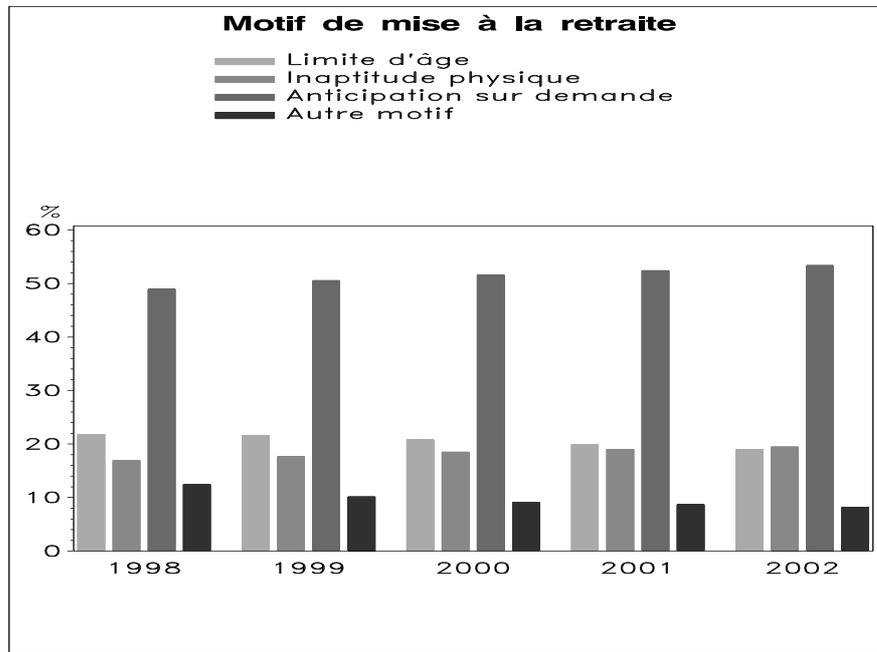


FIG. 2.6 – Répartition des motifs de mise à la retraite.

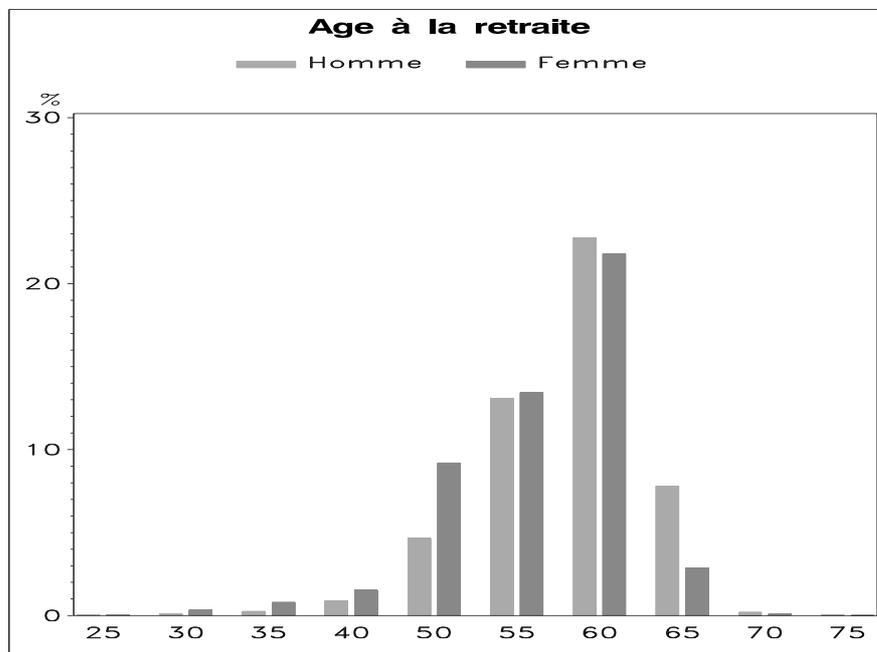


FIG. 2.7 – Répartition des âges auxquels les retraités vivants en 2002 ont pris leur pension.

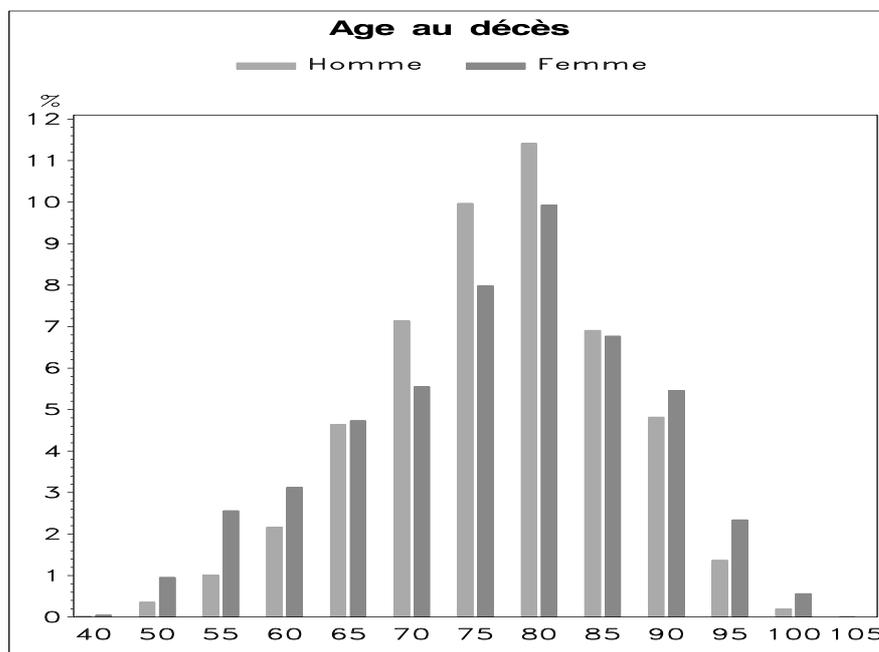


FIG. 2.8 – Répartition des âges auxquels le décès des retraités est survenu en 2002.

2.1.3 Pensions de survie

La répartition des pensions de survie par sexe et année est détaillée aux Tables 2.3 et 2.4. Sans surprise, l'immense majorité des pensions de survie est détenue par des femmes (95%). La part des hommes tend cependant à grandir avec le temps.

Rappelons que le droit aux pensions de survie n'est accessible aux hommes que depuis peu. En effet, seuls les hommes dont la conjointe est décédée après 1984 peuvent jouir d'une telle pension.

Variable	Valeur	1998	1999	2000	2001	2002
Sexe	Homme	2 352	2 685	3 019	3 360	3 714
	Femme	58 162	62 253	66 008	67 604	69 212
Total		60 514	64 938	69 027	70 964	72 926

TAB. 2.3 – *Composition des classes: survies (en chiffres absolus).*

Variable	Valeur	1998	1999	2000	2001	2002
Sexe	Homme	3.89%	4.13%	4.37%	4.73%	5.09%
	Femme	96.11%	95.87%	95.63%	95.27%	94.91%
Total		100%	100%	100%	100%	100%

TAB. 2.4 – *Composition des classes: survies (en %).*

2.1.4 Taux de mortalité et espérances de vie

Les Figures 2.9 à 2.12 reprennent les graphiques des taux de mortalité observés en 2002 pour chaque valeur des variables traitées. La Table 2.5 rend compte pour sa part des espérances de vie transversales restantes aux âges 50, 60, 70 et 80, et calculées à partir des données brutes en 2002. Celles-ci engendrent des taux de mortalité relativement erratiques, il convient donc de se méfier des chiffres obtenus, spécialement pour les classes à faible effectif.

Pensions de retraite		Hommes				Femmes			
		50	60	70	80	50	60	70	80
Langue	Néerlandais	27.32	20.65	12.58	6.44	32.71	25.03	16.22	8.52
	Français/Allemand	25.35	19.69	12.06	6.04	31.86	23.88	15.14	7.74
Enseignement	Non	26.05	19.89	12.09	6.15	30.61	23.44	14.99	7.83
	Oui	27.18	21.47	13.37	6.68	33.19	24.90	16.00	8.19
Etat civil	Marié	27.09	20.61	12.53	6.28	32.28	24.14	15.18	7.34
	Veuf	24.47	18.21	11.36	5.83	29.84	23.91	15.51	8.08
	Divorcé/Séparé	21.71	16.53	9.61	4.81	29.59	22.26	13.91	6.59
	Célibataire	32.25	23.47	15.31	8.28	38.05	29.27	19.58	11.33
Motif	Limite d'âge	29.57	20.96	12.80	6.51	35.43	26.01	16.44	8.18
	Inaptitude physique	22.43	16.62	10.25	5.56	30.29	22.31	14.60	7.91
	Anticipation sur demande	29.96	20.28	12.07	5.86	34.42	24.75	15.66	7.96
	Autre motif	24.43	19.71	12.26	5.89	32.62	22.62	13.98	7.13
Total		26.40	20.27	12.35	6.25	32.30	24.40	15.62	8.09

Pensions de survie		Hommes				Femmes			
		50	60	70	80	50	60	70	80
Total		27.52	19.35	10.93	5.44	31.56	23.36	15.30	7.86

TAB. 2.5 – *Espérances de vie transversales brutes à 50, 60, 70 et 80 ans en 2002.*

Certaines constatations sont néanmoins possibles:

- La communauté néerlandophone semble jouir d'une mortalité plus favorable que le reste de la population belge.
- De même, les enseignants possèdent un taux de mortalité globalement plus faible que les autres fonctionnaires.
- L'inaptitude physique diminue drastiquement l'espérance de vie, spécialement chez les hommes.
- Si les célibataires profitent d'une mortalité plus favorable, il en est tout autrement pour les divorcés/séparés.
- En règle générale, on peut également remarquer que les individus jouissant d'une pension de survie ont une espérance de vie plus faible que les retraités du secteur public.

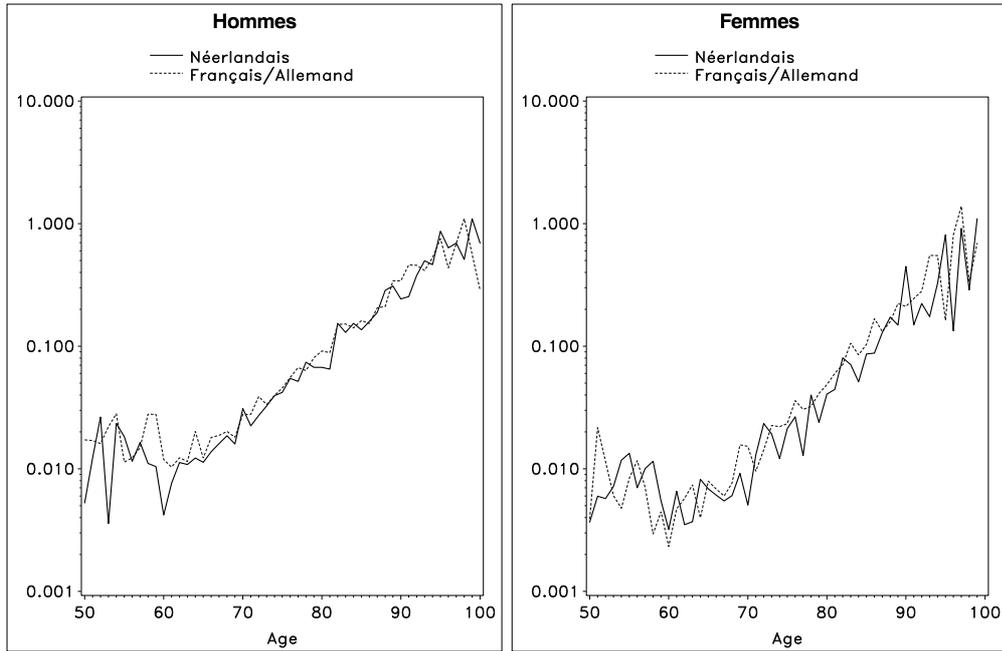


FIG. 2.9 – Estimation des taux de mortalité en 2002, par langue.

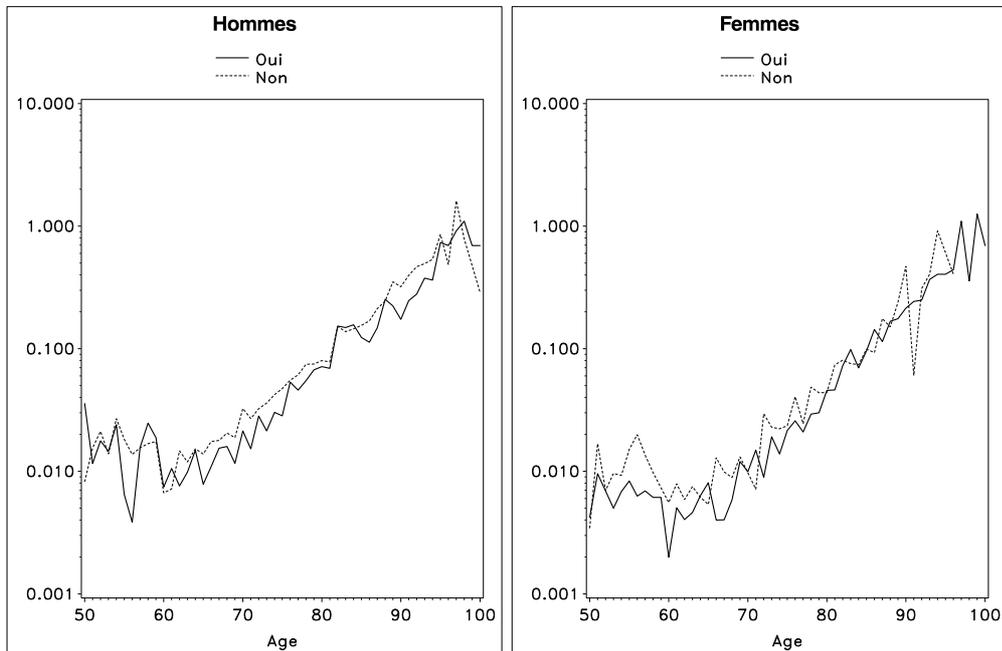


FIG. 2.10 – Estimation des taux de mortalité en 2002, pour les retraités de l'enseignement (oui) et pour les autres (non).

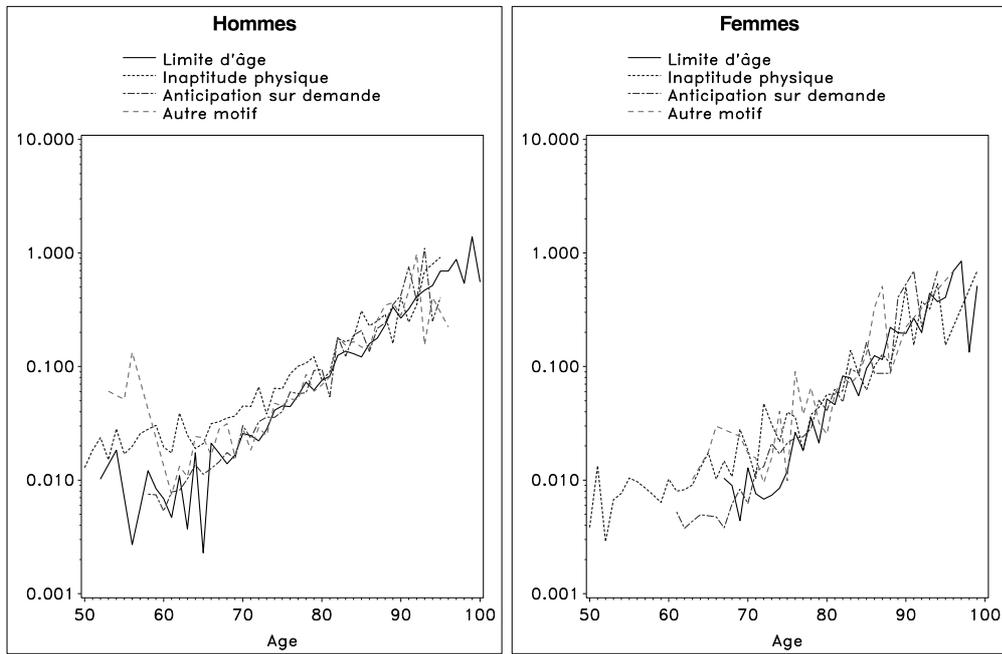


FIG. 2.11 – Estimation des taux de mortalité en 2002, par motif de pension.

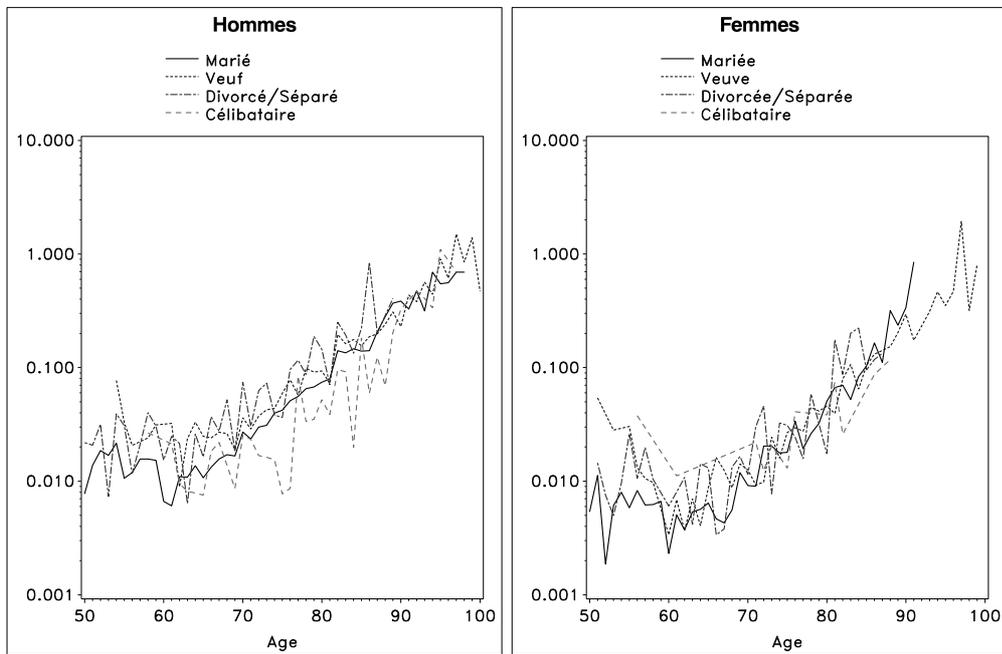


FIG. 2.12 – Estimation des taux de mortalité en 2002, par état civil.

2.2 Modèle d'antisélection

Tâchons maintenant de construire des tables de mortalité spécifiques à quelques sous-populations des pensionnés du secteur public. Pour illustrer les résultats, nous avons choisi trois types d'individus: les retraités du secteur public, les retraités de l'enseignement, et les personnes jouissant d'une pension de survie du secteur public. La Figure 2.13 montre la relation entre les logarithmes des taux de mortalité belges $\ln \widehat{\mu}_x(t)$ et ceux des populations particulières.

Ces graphiques sont à analyser avec précaution. Tout d'abord, une relation linéaire évidente se dessine, typiquement aux âges situés entre 60 et 90 ans. En dehors de cet intervalle, la relation est beaucoup plus floue. Chez les jeunes, un coup d'oeil naïf pourrait jeter les bases d'une relation linéaire de pente opposée. Néanmoins, il faut garder à l'esprit qu'une partie des observations est absente des graphiques. En effet, dans le cas où $\widehat{\mu}_x(t) = 0$ (chose fréquente entre 20 et 40 ans pour les populations à faible effectif), nous trouvons que $\ln \widehat{\mu}_x(t) = -\infty$. Ces points ne sont donc pas représentés mais permettraient sans doute de maintenir la pente visible au-delà de 60 ans.

Nous utilisons donc le modèle

$$d_x^*(t) \sim \text{Poisson}[\widehat{L}_x^*(t) \cdot \exp(\delta + \gamma(\widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t))] \quad (2.1)$$

où l'exposant * caractérise les indicateurs relatifs à la population étudiée.

La Figure 2.14 reprend les quotients de mortalité bruts et ajustés pour l'année 2002. La remarque précédente concernant l'absence de certains points peut être réitérée (l'échelle est logarithmique et si $\widehat{q}_x(t) = 0$ alors $\log \widehat{q}_x(t) = -\infty$).

Enfin, les espérances de vie transversales sont représentées à la Figure 2.15.

Remarquons que le modèle (2.1) pourrait être simplifié en laissant tomber l'hypothèse de la distribution de Poisson:

$$\ln \mu_x^*(t) = \delta + \gamma(\widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t) + \epsilon_{xt}$$

avec ϵ_{xt} des erreurs indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale $N(0, \sigma^2)$. Le modèle (2.1) possède toutefois l'avantage de prendre en compte la surdispersion de $d_x^*(t)$ aux âges faibles et élevés (peu d'effectif).

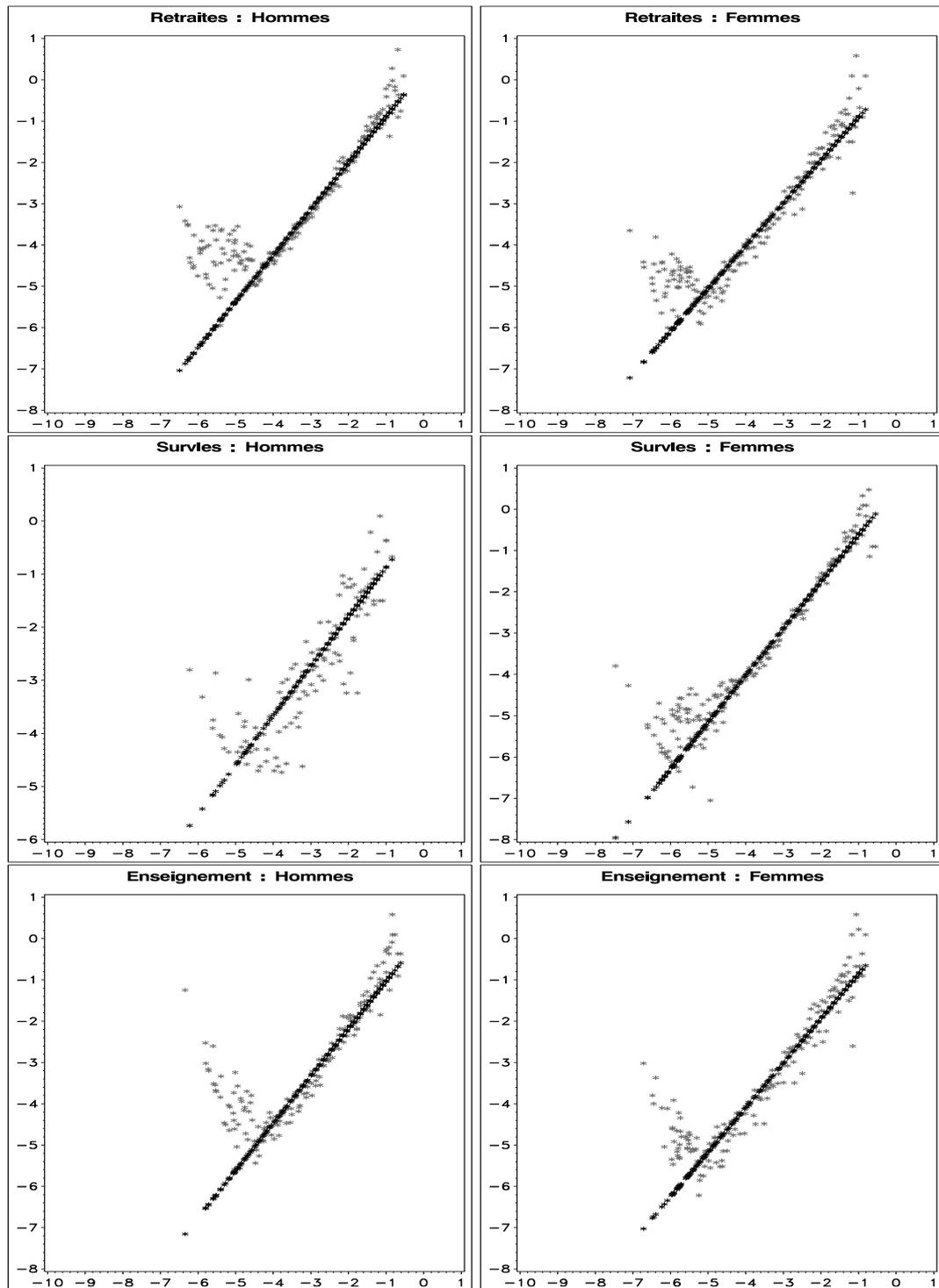


FIG. 2.13 – Lien (en gris) entre logarithmes des taux de mortalité pour chaque population (en ordonnée) et l'ensemble de la Belgique (en abscisse). Les points noirs représentent les valeurs prédites par le modèle d'antisélection (2.1).

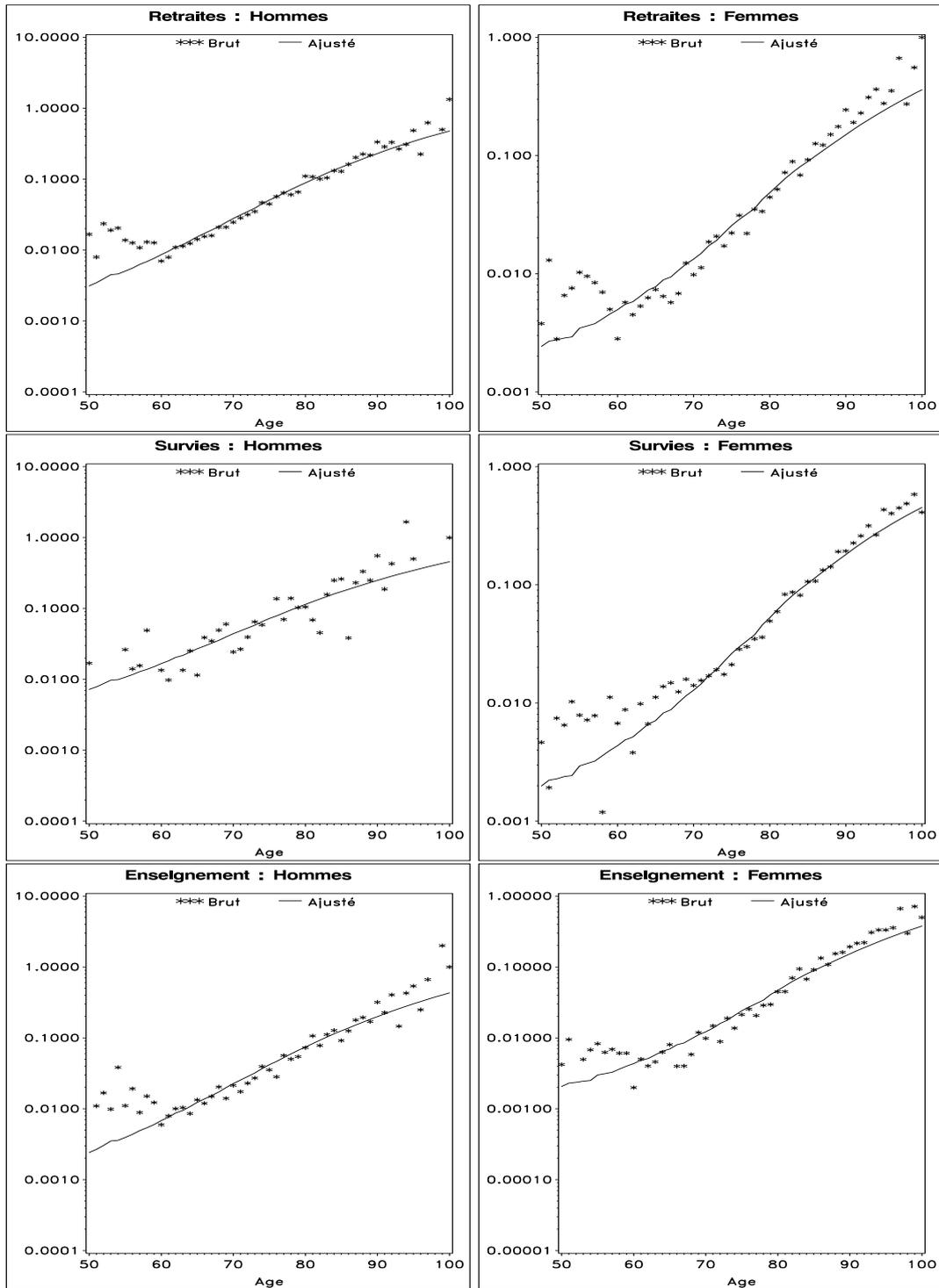


FIG. 2.14 – Ajustement des quotients de mortalité pour l'année 2002.

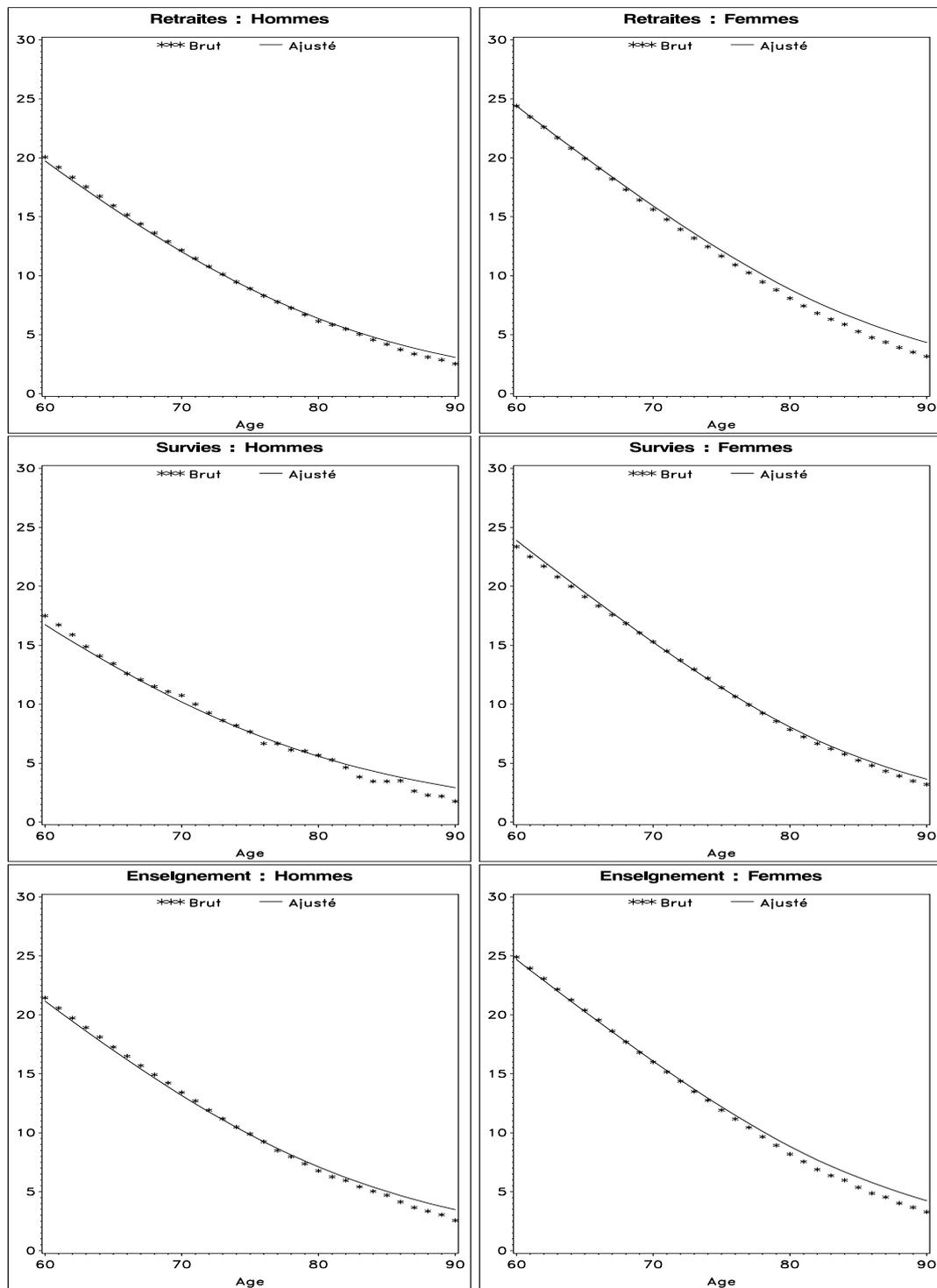


FIG. 2.15 – *Espérance transversale pour l'année 2002.*

2.3 Espérances de vie ajustées

Nous pouvons maintenant comparer les espérances de vie ajustées pour diverses classes de pensionnés avec celles relatives à la Belgique. Les résultats sont repris aux Tables 2.6 (espérances transversales) et 2.7 (espérances longitudinales)¹.

	Hommes				Femmes			
	50	60	70	80	50	60	70	80
Pensions de retraite: Enseignement	30.47	21.43	13.36	7.22	34.85	24.68	16.07	8.84
Pensions de retraite: Total	28.84	20.00	12.22	6.47	33.45	24.39	15.92	8.84
Pensions de survie: Total	24.87	16.99	10.36	5.67	33.10	23.89	15.26	8.07
Belgique: Total	27.48	19.07	11.79	6.48	33.43	24.45	16.06	9.06

TAB. 2.6 – *Espérances de vie transversales ajustées à 50, 60, 70 et 80 ans en 2002.*

	Hommes				Femmes			
	50	60	70	80	50	60	70	80
Pensions de retraite: Enseignement	33.71	23.33	14.20	7.49	38.63	27.80	17.71	9.42
Pensions de retraite: Total	31.97	21.77	12.97	6.70	38.13	27.43	17.51	9.41
Pensions de survie: Total	27.52	18.38	10.90	5.83	37.90	27.00	16.85	8.60
Belgique: Total	30.40	20.68	12.46	6.69	38.05	27.45	17.64	9.63

TAB. 2.7 – *Espérances de vie longitudinales ajustées à 50, 60, 70 et 80 ans en 2002.*

Comme attendu, les retraités de l’enseignement ont une espérance de vie très largement supérieure à la moyenne. De plus, les retraités du secteur public vivront plus longtemps que la moyenne nationale. Les pensions de survie bénéficient au contraire d’une mortalité moins clémentine.

Il convient néanmoins d’interpréter ces résultats avec précaution. Diverses études ont montré que la mortalité était fortement influencée par des facteurs socio-économiques. La sous-mortalité des enseignants pourrait ainsi être causée par la sur-représentation des diplômés des enseignements supérieur et universitaire dans cette catégorie. Dans ce contexte, l’étude d’une variable représentant le niveau d’étude avait été initialement envisagée. Nous avons cependant y renoncer pour des raisons techniques.

1. Rappelons que les espérances transversales sont basées sur les taux de mortalité d’une seule et même année ($\mu_x(t), \mu_{x+1}(t), \mu_{x+2}(t), \dots$). Elles suivent donc une génération fictive qui aurait pour mortalité celle observée l’année en question. Les espérances de vie longitudinales, au contraire, suivent réellement les individus dans le temps. Elles utilisent les taux $\mu_x(t), \mu_{x+1}(t+1), \mu_{x+2}(t+2), \dots$ et peuvent donc rendre compte de l’évolution future de la mortalité. Si celle-ci baisse avec le temps, les espérances longitudinales seront supérieures aux transversales.

Chapitre 3

La mortalité comme paramètre d'Exsypen

3.1 Présentation d'Exsypen

Exsypen est un outil de simulation réalisé par l'Administration des pensions en collaboration avec la société *Siemens Nixdorf Information Systems*. Son principal objectif est d'aider les responsables politiques, budgétaires et administratifs à prendre des décisions en matière de pensions, tant sur le plan économique que social.

Cet outil relativement complexe permet de simuler les carrières des fonctionnaires en tenant compte des stades les plus divers (engagement, promotion, mise à la retraite, etc.). Pour ce faire, l'outil tient compte de paramètres aussi nombreux qu'indispensables et relevant de deux types. Le premier regroupe l'ensemble des aspects socio-économiques tels que la politique de l'emploi, des salaires et de la péréquation¹. Le second est composé des facteurs démographiques (et de la mortalité en particulier), secteur qui nous intéresse plus particulièrement. Les trajectoires prédites sont alors systématiquement analysées et mémorisées dans une banque de données.

Ainsi, pour simuler les carrières et retraites, Exsypen doit faire mourir les fonctionnaires et retraités suivant des tables de mortalité prédéfinies. Nous mettons là le doigt sur un problème inhérent à cet outil: quelles tables de mortalité choisir? En réalité, Exsypen utilise cinq tables distinctes, censées modéliser la mortalité d'autant de sous-classes de la population générale: les actifs, les ex-actifs (anciens fonctionnaires pas encore retraités, mais bénéficiant d'un droit potentiel à une pension de retraite future), les personnes jouissant d'une pension de survie relative à un employé du secteur public, les retraités, et les conjoints (potentiellement bénéficiaires d'une future pension de survie). Comme constaté précédemment, la mortalité peut varier fortement d'une classe à l'autre. Il convient donc d'utiliser des tables adéquates.

3.2 Impact des tables de mortalité sur les simulations d'Exsypen

Nous allons maintenant quantifier l'impact des tables de mortalité utilisées sur les simulations d'Exsypen. Pour ce faire, nous décidons de comparer les résultats de trois scénarios

1. Le problème de la péréquation est le suivant. Supposons que les barèmes salariaux d'une classe de fonctionnaires sont réévalués. Faut-il tenir compte de cet ajustement dans le calcul de la pension des personnes déjà retraitées et issues de cette classe? On parlera de péréquation lorsque les montants de pension des retraités sont ajustés suivant les nouveaux barèmes.

différents, appliqués à la population issue de l'enseignement francophone et germanophone. Le premier considère une population homogène, en supposant les cinq tables identiques et égales à celle calculée au chapitre 1.4 pour la population belge. Dans le second, nous utilisons la table propre aux retraités du secteur public et celle relative aux pensions de survies (calculées à la section 2.2). Enfin, dans le troisième scénario, nous tenons compte de la table particulière des retraités de l'enseignement, tout en maintenant celle des pensions de survie.

Population	Scénario 1	Scénario 2	Scénario 3
Actifs	Population belge	Population belge	Population belge
Ex-actifs	Population belge	Population belge	Population belge
Retraite	Population belge	Retraite secteur public	Retraite enseignement
Survie	Population belge	Survie secteur public	Survie secteur public
Conjoint	Population belge	Population belge	Population belge

Les Figures 3.1 et 3.2 reprennent les résultats de la simulation pour le nombre de pensions et le montant total de celles-ci. La Figure 3.3 permet de chiffrer les écarts, en analysant les rapports Scénario 2/Scénario 1 et Scénario 3/Scénario 1 respectivement pour les nombres et montants totaux des pensions. Pour des résultats plus précis, voyez l'Annexe C.

Par une analyse du nombre de pensions simulées, on fait déjà apparaître très clairement l'impact des tables de mortalité choisies. Analysons donc successivement le passage d'un scénario à l'autre.

L'écart entre les scénarios 1 et 2 est directement influencé par les tables de mortalité des pensions de retraite et de survie. Le passage à une table plus lente (taux de mortalité moins élevés) pour les retraités (scénario 2) fait grimper le nombre des pensions de retraite puisque ces individus possèdent une espérance de vie plus élevée. Ceci est clairement visible sur le premier graphique de la Figure 3.1. Il est par contre moins aisé d'en déduire un comportement pour le nombre de pensions de survie. En effet, celui-ci subit l'influence conjointe des tables relatives aux retraités et aux survies. Toutes autres choses étant égales, un ralentissement de la table des retraités devrait faire diminuer le nombre de pensions de survie, puisque les retraités auront tendance à rester plus longtemps en vie. De même, une accélération de la table des survies devrait voir diminuer le nombre de pensions de survie. Ces deux phénomènes agissent de pair dans le scénario 2. Nous constatons donc au deuxième graphique de la Figure 3.1 que le nombre de pensions de survie diminue lors du passage du scénario 1 au scénario 2. Au total cependant, comme nous le montre le premier graphique de la Figure 3.3, le nombre de pensions reste remarquablement stable entre les deux scénarios. Les écarts oscillent dans une fourchette très faible de l'ordre de $[-0.2\%, 0.35\%]$.

Le troisième scénario ne diffère du second que par la table des retraités. En ralentissant encore le décès des retraités, nous constatons à nouveau une augmentation du nombre des pensions de retraite et une diminution de celui des pensions de survie. Cette fois, l'influence de la table des retraités est telle que le nombre total de pensions grimpe de plus de 1.7% par rapport au premier scénario (premier graphique de la Figure 3.3).

Toutes ces réflexions restent valables si l'on considère le montant des pensions plutôt que leur nombre. L'influence de la table des retraités sera cependant encore accrue. Pour preuve, le second graphique de la Figure 3.3 montre une croissance du montant total des pensions de près de 3% vers 2025 en cas de passage du scénario 1 au scénario 3. Cet écart semble toutefois s'amenuiser avec le temps. L'utilisation de tables générales belges pour une population aussi particulière que le corps enseignant francophone et germanophone reviendrait donc à sous-estimer assez largement la charge des pensions dans les années à venir. La création de tables particulières adaptées à ce genre de population semble donc impératif.

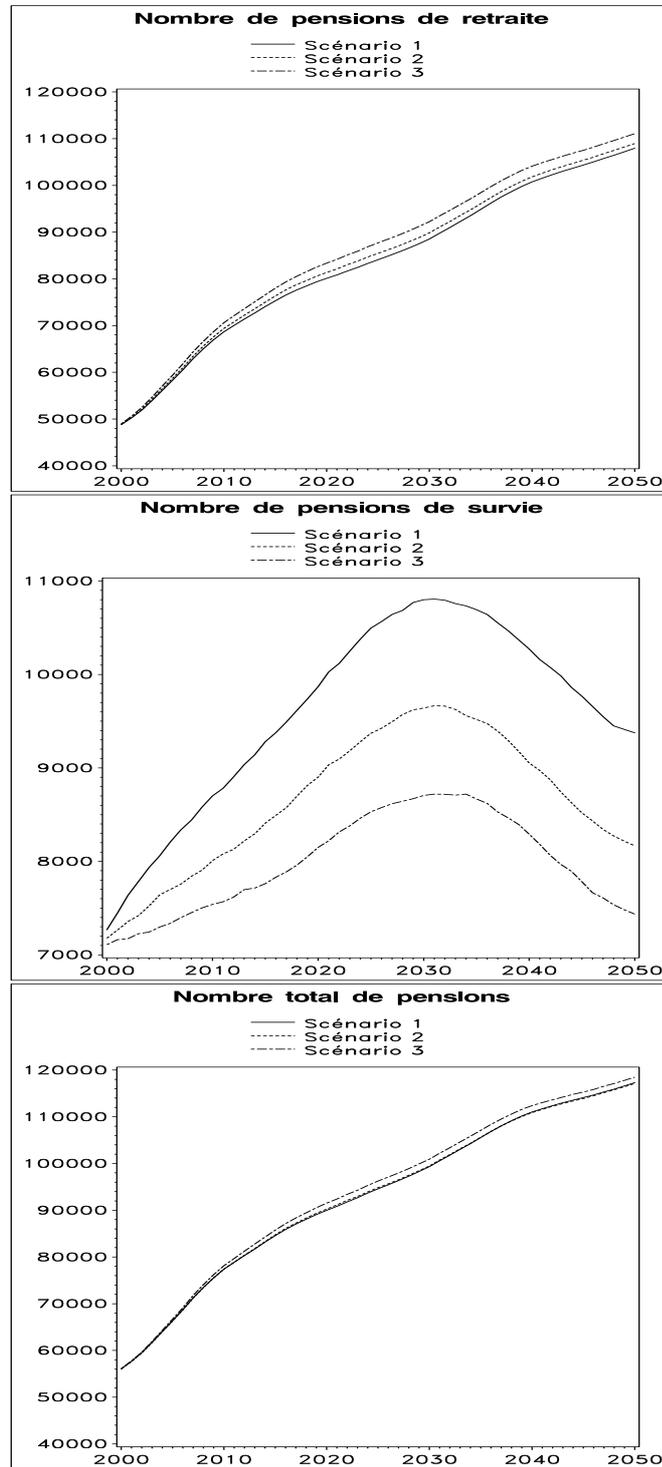


FIG. 3.1 – Comparaison des trois scénarios : Nombre de pensions.

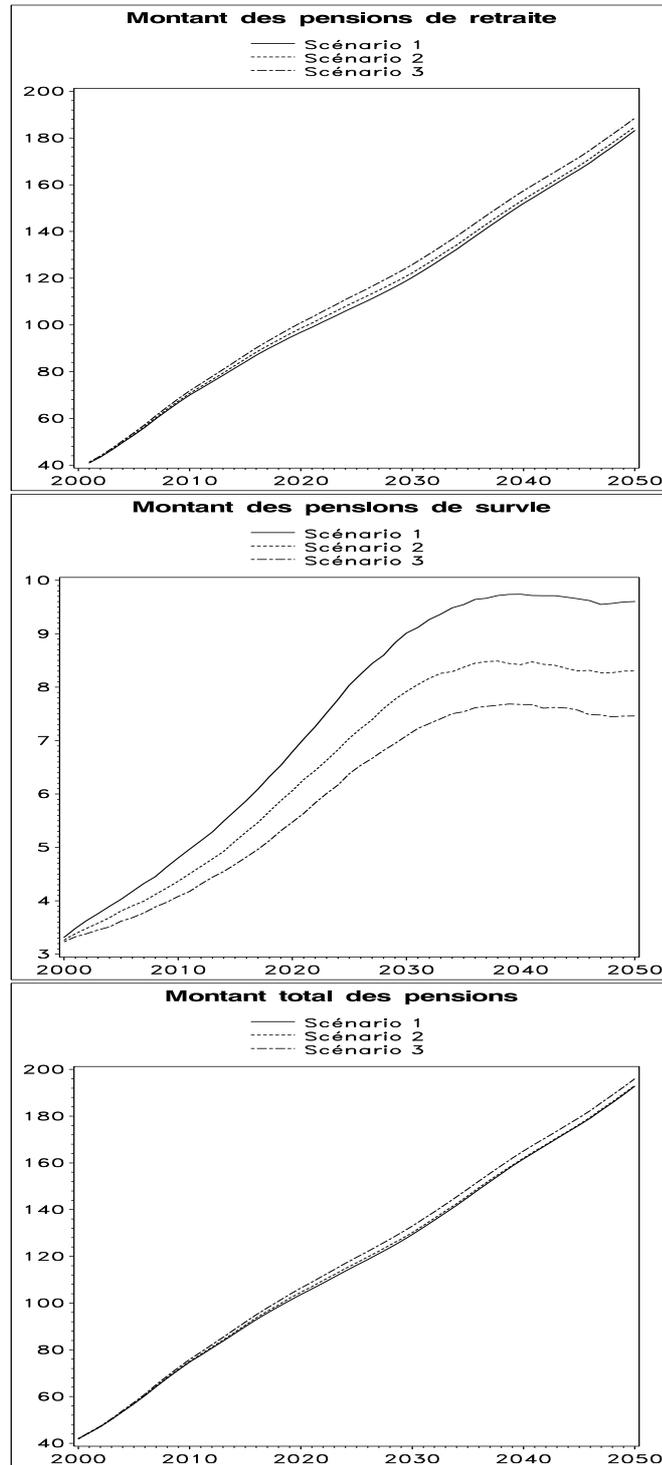


FIG. 3.2 – Comparaison des trois scénarios : Montant des pensions (millions d'euros).

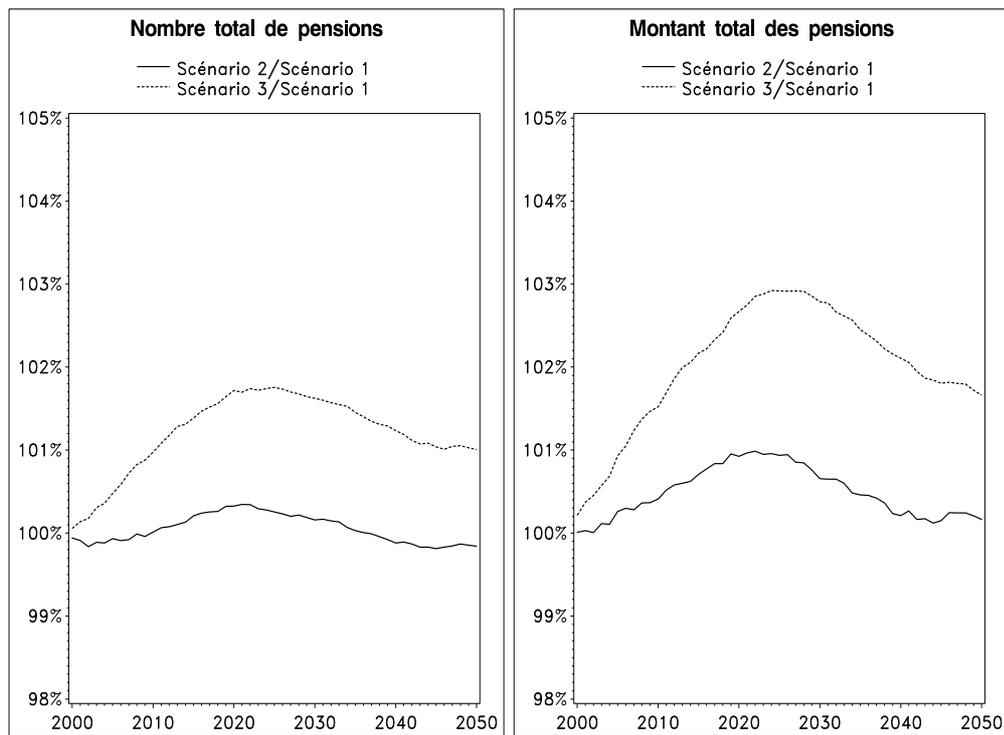


FIG. 3.3 – Comparaison des trois scénarios : Gain des scénarios 2 et 3 par rapport au scénario 1.

Chapitre 4

Calcul des cotisations sociales imputées

4.1 Introduction

En guise d'application de l'outil Exsyspen, nous abordons ici le problème du calcul des cotisations sociales imputées à la charge des employeurs. Ce poste est estimé pour les employeurs qui gèrent des régimes d'assurance sociale sans constitution de réserves. Un tel calcul a une influence notable sur le PIB lorsque l'employeur est un producteur non marchand. Dans cette optique, il devient indispensable de rendre cohérent, voire homogène, ce calcul effectué dans les différents pays de l'Union Européenne.

En 2003, Eurostat s'est donc penché sur le problème en préparant un document sur les méthodes et les sources utilisées par les Etats membres pour l'estimation des cotisations imputées pour les administrations publiques. Cette note a également pour objet de donner des indications aux comptables nationaux qui souhaitent revoir leurs méthodes et d'aborder également certaines questions conceptuelles liées à l'estimation de ces cotisations imputées.

4.2 Méthodes pouvant être utilisées

Il ressort du document préparé par Eurostat que quatre méthodes peuvent être utilisées pour le calcul des cotisations imputées: la méthode des prestations payées, la méthode de la part de salaire, la méthode des prestations payées avec facteur de correction pour les pensions, et enfin une estimation entièrement actuarielle. Passons rapidement ces méthodes en revue.

4.2.1 Méthode des prestations payées

Ce principe calcule les cotisations imputées par la différence entre les prestations d'assurance sociale directes d'employeurs payées et les cotisations des salariés (le cas échéant). Pour les administrations publiques, la méthode est généralement facile à appliquer. Pour les pensions, cette méthode est acceptable à condition que certaines caractéristiques soient stables dans le temps. Ainsi, il faut que le régime ne fasse pas l'objet de changements majeurs, notamment dans la définition des prestations. En outre, cette méthode requiert un rapport constant entre le nombre de personnes occupées d'une part, et le nombre de bénéficiaires de pensions d'autre part. De par l'évolution de la pyramide des âges en Belgique, cette dernière condition n'est pas remplie et on peut donc s'interroger sur la pertinence d'une telle méthode.

4.2.2 Méthode des prestations payées avec facteur de correction pour les pensions

Pour obtenir un montant de cotisations imputées, cette technique propose de corriger les pensions payées par les administrations publiques aux fonctionnaires par un facteur déterminé. Celui-ci vaudrait

$$\text{facteur de correction} = \frac{\frac{NA}{NP} \text{courant}}{\frac{NA}{NP} \text{moyen}}$$

où "NA" et "NP" font référence respectivement au nombre d'actifs et de pensionnés, et les mots "courant" et "moyen" à l'année courante et à une moyenne sur les n dernières années.

Cette méthode permet de continuer à utiliser les prestations payées comme base d'estimation dans des circonstances où la méthode des prestations payées serait inefficace. Se pose néanmoins le choix du paramètre n . Eurostat propose donc une valeur de n proche de 20. Il ressort de l'application de cette méthode qu'elle convient plus particulièrement dans les cas de fluctuations à court terme de la main-d'oeuvre et de stabilité des droits aux prestations.

4.2.3 Méthode de la part de salaire

Ce principe considère une estimation au moyen d'un pourcentage *raisonnable* des salaires et des traitements versés au personnel en activité. Ce taux pourrait être tiré d'estimations actuarielles effectuées ailleurs ou du rapport entre les cotisations sociales et les salaires du personnel couvert par un autre régime.

4.2.4 Estimation entièrement actuarielle

Cette méthode consisterait à baser les estimations des cotisations imputées sur le nombre de salariés en activité par sexe, âge, situation familiale, niveau de salaire, etc. Il faudrait y associer des projections du niveau des futures prestations à recevoir, de l'âge de la retraite, de la mortalité, des taux d'invalidité, des cessations d'activité, des futures augmentations de salaires, de l'inflation, etc. De telles projections peuvent donner lieu à une charge prohibitive. Exsyspen a néanmoins été conçu pour répondre à ce genre de sollicitations, et semble approprié pour résoudre ce problème.

Le document d'Eurostat explique également que pour être conformes, les considérations actuarielles doivent tenir compte des facteurs pertinents précédemment énumérés, mais en excluant tout revenu de la propriété sur les cotisations imputées cumulées. Cette remarque plaide donc en la faveur d'un taux d'intérêt nul dans le calcul de ces cotisations.

Il ne reste donc plus qu'à mettre au point l'estimation actuarielle proprement dite. Ceci fait l'objet de la section suivante.

4.3 Estimation actuarielle: *Aggregate Cost Method*

4.3.1 Modèle de base

Nous cherchons à estimer un taux τ à appliquer à l'ensemble de la masse salariale d'une population donnée lors d'une année t pour calculer les cotisations imputées relatives à cette année. La méthode dite *Aggregate Cost Method* estime ce taux de la manière suivante:

$$\tau = \frac{PVFB}{PVFS}. \quad (4.1)$$

Explicitons maintenant les valeurs $PVFB$ et $PVFS$:

- **PVFB:** *Present Value of Future Benefits*. Il s'agit de la valeur présente de toutes les prestations futures relatives aux affiliés (actifs ou retraités) présents dans le plan de pension lors de l'année de référence.
- **PVFS:** *Present Value of Future Salaries*. Il s'agit de la valeur présente de toutes les masses salariales futures relatives aux affiliés (actifs) présents dans le plan de pension lors de l'année de référence.

Formalisons quelque peu les considérations précédentes. Notons $S_i(t)$ le salaire (projeté) de l'individu i lors de l'année t , $B_i(t)$ la prestation qui lui sera versée l'année t et $P(t)$ l'ensemble des individus présents dans le plan lors de l'année t . Le taux τ lors d'une année t^* sera donc

$$\tau(t^*) = \frac{PVFB(t^*)}{PVFS(t^*)}$$

avec

$$\begin{aligned} PVFB(t^*) &= \sum_{i \in P(t^*)} \sum_{t \geq t^*} B_i(t) \\ PVFS(t^*) &= \sum_{i \in P(t^*)} \sum_{t \geq t^*} S_i(t). \end{aligned}$$

Remarques

- L'estimation des valeurs $PVFB$ et $PVFS$ nécessite le déroulement de la carrière et de la retraite de tous les individus présents dans le plan lors de l'année de référence t^* . En supposant que l'affilié le plus jeune est âgé de 20 ans l'année t^* et qu'il faut attendre l'âge de 120 ans pour être décédé à coup sûr, le modèle devra donc simuler pas moins de 100 ans pour estimer τ lors de la seule année de référence t^* .
- Seuls interviennent dans le calcul de τ pour une année fixée t^* les individus présents dans le plan de pension lors de cette année t^* . Le calcul s'effectue donc sur une population fermée (tous les individus présents l'année t^*).
- Bien entendu, pour obtenir l'estimation de τ à l'année t^*+1 , il faut recommencer l'entièreté du calcul à partir de la population présente en t^*+1 .

4.3.2 Cadeau de la première génération

Le modèle présenté ci-dessus présente un défaut remarquable: aucun des individus présents lors de l'année de référence n'aura cotisé suffisamment pour financer sa pension. En effet, les retraités n'ont pas cotisé du tout; il leur est donc attribué une pension gratuite. Les actifs n'ont pour leur part pas cotisé pour leurs années de service passées.

Cette technique risquerait donc de mener à un taux τ de cotisation anormalement élevé, puisqu'il servirait à financer la totalité des droits acquis par les personnes présents lors de l'instauration du plan. Cet ensemble des droits acquis est connu sous le nom de *cadeau de la première génération*.

Il convient donc de modifier le numérateur de la formule (4.1):

$$\tau = \frac{PVFB - F}{PVFS}. \quad (4.2)$$

où F représente l'ensemble des droits acquis, à savoir l'entièreté des prestations des individus déjà retraités lors de l'année de référence, et la part des pensions des futurs retraités relative à leurs années d'ancienneté.

Formellement, notons $B_i(t, t')$ les prestations pour l'individu i lors de l'année t relatives à des activités postérieures à l'année t' . Le taux τ lors de l'année t^* devient donc

$$\tau(t^*) = \frac{PVFB(t^*) - F(t^*)}{PVFS(t^*)}$$

avec

$$\begin{aligned} PVFB(t^*) - F(t^*) &= \sum_{i \in P(t^*)} \sum_{t \geq t^*} B_i(t, t^*) \\ PVFS(t^*) &= \sum_{i \in P(t^*)} \sum_{t \geq t^*} S_i(t). \end{aligned}$$

4.4 Application

Observons maintenant les résultats de cette méthode appliquée à la population des actifs et pensionnés du SPF Finances. Nous avons choisi d'utiliser les tables de mortalité relatives aux retraites et survies du secteur public que nous avons construites précédemment. La mortalité des actifs, ex-actifs et conjoints est pour sa part modélisée par la table belge.

Il convient de préciser que la simulation débute l'année 2000 pour se terminer en 2100. Ainsi, nous observons que la population présente lors des années 2012 et suivantes n'est pas complètement éteinte en 2100. Ceci pourrait sous-évaluer le taux de cotisation de l'*Aggregate Cost Method* puisque des prestations en réalité payées au-delà de 2100 ne sont pas prises en compte dans le modèle. Cependant, parmi la population présente en 2020 (approximativement 30000 actifs et ex-actifs), Exsyspen fait état de 80 pensions de retraite et 34 pensions de survie non éteintes en 2100. L'erreur commise est donc très faible.

La Figure 4.1 reprend les taux de cotisations obtenus à partir de l'*Aggregate Cost Method* et les compare avec ceux relatifs à un système en répartition (méthode des prestations). Pour les détails chiffrés, voyez l'Annexe D. Nous trouvons donc des taux annuels relatifs aux pensions de retraite et pensions de survie. En les additionnant, nous pouvons également calculer un taux global pour l'ensemble des pensions de retraite et de survie.

Retraites. Le taux d'un système en répartition est relativement stable (aux alentours de 35%) entre 2000 et 2007. Ensuite, il croît dramatiquement pour atteindre près de 70% en 2020. Au contraire, le taux issu de l'estimation actuarielle part en 2000 d'une valeur largement supérieure (à peine moins de 60%). Il progresse cependant beaucoup moins vite et plus régulièrement avec le temps (66% en 2020). On peut donc le considérer comme un nivellement du taux en répartition qui, selon une grossière extrapolation, devrait continuer à grimper rapidement au-delà de 2020.

Survies. Le taux de cotisation pour les pensions de survie adopte un comportement totalement différent de celui des pensions de retraite. Les deux méthodes affichent un taux en constante dégression. Pour la méthode des prestations, le taux part de 11.6% en 2000 pour atteindre 9% en 2020. La chute semble même s'intensifier avec le temps. L'*Aggregate Cost Method* propose pour sa part un taux beaucoup plus faible (autour de 6%) et plus constant dans le temps (il perd moins de 1% en 20 ans). Il faut remarquer que, contrairement aux attentes, le taux issu de l'estimation actuarielle est inférieur à celui qui est actuellement demandé pour alimenter le Fonds des pensions de survie (7.5%).

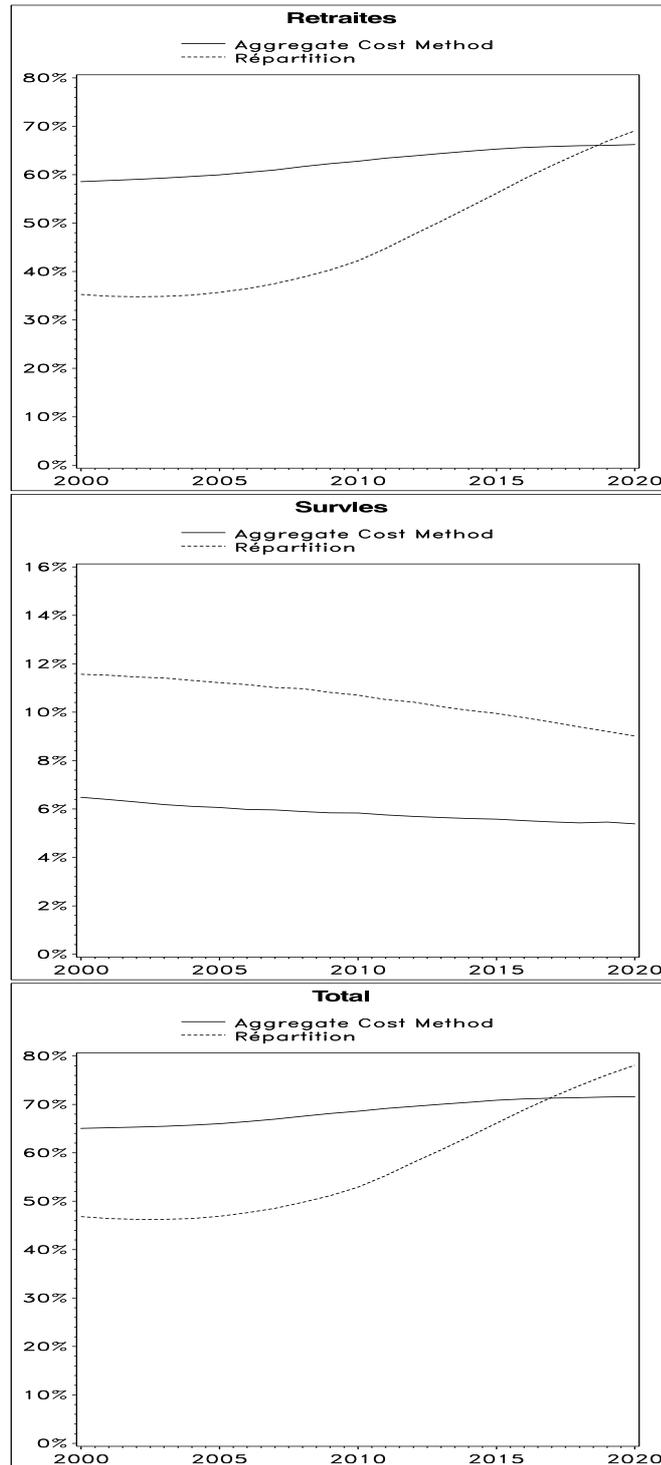


FIG. 4.1 – Comparaison des taux obtenus par l'Aggregate Cost Method et un système en répartition pour les pensions de retraite (en haut), les pensions de survie (au milieu) et le total (en bas).

4.5 Conclusions

Les deux méthodes comparées à la section précédente font état de taux largement différents. Les hypothèses de base de la méthode des prestations n'étant pas satisfaites, il convient de préférer l'estimation actuarielle.

La relative constance temporelle du taux estimé par l'*Aggregate Cost Method* autorise, semble-t-il, à ne pas répéter le calcul chaque année. Un délai de plus ou moins cinq ans nous semble raisonnable, en l'absence de décision influant sur la charge des pensions (modification de l'âge à la retraite, des montants de pension,...). De tels bouleversements requièreraient évidemment de nouvelles simulations.

Enfin, précisons que nous n'avons illustré la méthode qu'avec la population du Service Public Fédéral Finances. Des taux sensiblement différents devraient être trouvés avec d'autres sous-populations. Il serait sans doute utile de traiter le cas de l'enseignement qui possède, comme nous l'avons vu précédemment, des espérances de vie supérieures à la moyenne. Le taux de cotisation devrait donc y être légèrement plus important. Un tel travail relève cependant de l'implémentation d'Exsyspen, et serait donc à la charge de l'équipe Exsyspen de l'Administration des Pensions.

Conclusion

Au terme de ce projet, il convient de revenir brièvement sur les objectifs qui nous avaient été assignés.

Le premier d'entre eux consistait en l'apport d'un point de vue neuf et extérieur sur Exsyspen. Après avoir examiné le logiciel en profondeur, nous nous sommes rendu compte du peu de techniques purement actuarielles présentes en son sein. Plus précisément, Exsyspen est basé sur un grand nombre d'hypothèses et de calculs de pensions, domaines dans lesquels notre apport aurait été négligeable, voire inutile. Le seul domaine où, selon nous, une expertise semblait nécessaire était celui du choix des tables de mortalité utilisées par l'outil de simulation. Lors de l'entrée en vigueur du projet, Exsyspen basait ses projections sur les tables de mortalité prospectives INS 1995. Leur remplacement par d'autres, plus modernes et spécifiques au secteur étudié, fut donc le premier objectif recherché. Cette étape est détaillée dans les deux premiers chapitres du présent rapport, alors que le troisième chapitre en résume les effets sur les projections d'Exsyspen.

Il nous était également demandé de répondre à quelques besoins actuariels ponctuels internes. L'estimation des cotisations imputées en est la partie la plus visible. Le traitement de ce problème fait donc l'objet du quatrième chapitre.

Enfin, rappelons l'opportunité qui nous a été donnée de travailler en collaboration avec des collègues québécois. Aux prises avec un projet en de nombreux points similaire au nôtre, nous avons pu partager avec ces derniers approches, techniques et réflexions. Cette mise en commun utile et féconde s'est concrétisée par l'entremise d'une mission d'une semaine à l'Université Laval, Québec.

Références

Articles

- BROUHNS, N., & DENUIT, M. (2001a). Risque de longévité et rentes viagères I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours. *Belgian Actuarial Bulletin* **2**.
- BROUHNS, N., & DENUIT, M. (2001b). Risque de longévité et rentes viagères II. Tables de mortalité prospectives pour la population belge. *Belgian Actuarial Bulletin* **2**.
- BROUHNS, N., DENUIT, M., & VERMUNT, J. (2002). A Poisson regression approach to the construction of projected lifetables for life annuitants. Discussion Paper, Institut de Statistique, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique.
- DELWARDE, A. & DENUIT, M. (2003). *Importance de la fourchette d'âges et des années considérées dans la projection de la mortalité par la méthode de Lee-Carter*. *Belgian Actuarial Bulletin* **3**.
- LEE, R.D. (2000). The Lee-Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American Actuarial Journal* **4**, 80-91.
- LEE, R.D., & CARTER, L. (1992). Modelling and forecasting the time series of US mortality. *Journal of the American Statistical Association* **87**, 659-671.
- VAUPEL, J.W. (1997). Trajectory of mortality at advanced ages. In *Between Zeus and the Salmon: The Biodemography of Longevity*, pp. 17-37, National Academy of Science.
- WILMOTH, J.R. (1993). Computational methods for fitting and extrapolating the Lee-Carter model of mortality change. Technical Report, Department of Demography, University of California, Berkeley.

Documents

- DELVILLE, J.-P., VERPLAETSE, S., DEFOURNY, D. & JANSSENS, J. L'évolution du nombre et de la charge des pensions publiques 1994-2040. Exsyspen. Administration des pensions - Siemens Nixdorf.
- DEVOLDER, P. Financement des caisses de pension, Syllabus du cours ACTU 2140, Institut des sciences actuarielles, UCL.
- Cotisations sociales imputées. Eurostat, 42ème réunion du comité PNB, 03-04 juillet 2003, Luxembourg.
- Exsyspen, Guide de l'utilisateur. Administration des Pensions, Siemens - KBT.
- Perspectives de population 1995-2050. Institut national de Statistique - Bureau fédéral du Plan.

Annexe A

Hypothèse sur la répartition des décès dans l'année

En travaillant avec les tableaux $l_x(t)$ et $d_x(t)$ que nous avons définis, nous ne possédons aucune indication sur la répartition des décès durant chaque année. C'est pourquoi il est nécessaire de recourir à une hypothèse de travail. Celle-ci suppose que les taux instantanés de mortalité $\mu_x(t)$ sont constants par morceaux, i.e.

$$\mu_{x+\xi}(t + \tau) = \mu_x(t)$$

pour ξ et τ tous deux positifs et strictement inférieurs à 1. On vérifie alors facilement que dans ce cas

$$q_x(t) = \frac{d_x(t)}{l_x(t)} \tag{A.1}$$

$$\mu_x(t) = -\ln(1 - q_x(t)) \tag{A.2}$$

$$L_x(t) = \frac{-l_x(t)q_x(t)}{\ln(1 - q_x(t))} \tag{A.3}$$

$$e_x(t) = \frac{\sum_{y \geq x} L_y(t + y - x)}{l_x(t)} \tag{A.4}$$

où $L_x(t)$ est une mesure de l'exposition au risque et $e_x(t)$ est l'espérance de vie restante pour un individu âgé de x années durant l'année t .

D'autres hypothèses plus compliquées existent dans la littérature. Les différences qu'elles engendrent sont cependant minimes.

Annexe B

Décomposition en valeurs singulières

La méthode de Lee-Carter nécessite la décomposition en valeurs singulières de la matrice \mathbf{Z} . Notons \mathbf{u}_i le i ème vecteur propre normé de la matrice carrée $\mathbf{Z}^t \mathbf{Z}$ de dimension $(t_{\max} - t_{\min} + 1) \times (t_{\max} - t_{\min} + 1)$ correspondant à la valeur propre λ_i ; ceci signifie que \mathbf{u}_i satisfait les conditions suivantes:

$$\mathbf{Z}^t \mathbf{Z} \mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i \text{ et } \mathbf{u}_i^t \mathbf{u}_i = 1.$$

En prémultipliant les deux membres de la première égalité par \mathbf{Z} , on obtient

$$(\mathbf{Z} \mathbf{Z}^t) \mathbf{Z} \mathbf{u}_i = \lambda_i (\mathbf{Z} \mathbf{u}_i).$$

Cette dernière relation montre qu'à tout vecteur propre \mathbf{u}_i de $\mathbf{Z}^t \mathbf{Z}$ relatif à une valeur propre λ_i non nulle correspond un vecteur propre $\mathbf{Z} \mathbf{u}_i$ de $\mathbf{Z} \mathbf{Z}^t$, relatif à la même valeur propre λ_i . Ainsi, toutes les valeurs propres de $\mathbf{Z}^t \mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z} \mathbf{Z}^t$ sont égales (avec le même ordre de multiplicité, le cas échéant). Si on note \mathbf{v}_i le i ème vecteur propre de la matrice carrée $\mathbf{Z} \mathbf{Z}^t$ de dimension $(x_{\max} - x_{\min} + 1) \times (x_{\max} - x_{\min} + 1)$, correspondant à la valeur propre λ_i , on a alors pour $\lambda_i \neq 0$,

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{Z} \mathbf{u}_i$$

ou encore

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{Z}^t \mathbf{v}_i.$$

Partons à présent de la relation

$$\mathbf{Z} \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i \sqrt{\lambda_i}$$

et postmultiplions les deux membres de cette égalité par \mathbf{u}_i^t , avant de sommer sur toutes les valeurs propres de $\mathbf{Z}^t \mathbf{Z}$

$$\mathbf{Z} \left(\sum_{i \geq 1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^t \right) = \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^t.$$

Les vecteurs propres \mathbf{u}_i étant orthogonaux et de norme 1,

$$\sum_{i \geq 1} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^t = \text{Identité}$$

de sorte qu'on aboutit à la décomposition suivante de la matrice \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z} = \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^t.$$

Cette dernière formule est appelée décomposition aux valeurs singulières. Elle garantit que, sous des conditions assez générales, une matrice rectangulaire peut être écrite de façon unique comme une "somme optimale" de matrices de rang 1 (c'est-à-dire de produits d'une matrice ligne par une matrice colonne). L'optimalité dont il est question signifie que la première matrice de rang 1 constitue la meilleure approximation de rang 1 de la matrice initiale (au sens des moindres carrés), que la somme des deux premières constituent la meilleure approximation de rang 2, etc.

Si la valeur propre λ_1 domine nettement les autres, on obtient alors l'approximation

$$\mathbf{Z} \approx \sqrt{\lambda_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^t. \quad (\text{B.1})$$

On mesure la qualité de l'approximation (B.1) par le taux d'inertie τ_1 (ou pourcentage de variance expliqué), donné par

$$\tau_1 = \frac{\lambda_1}{\sum_{i \geq 1} \lambda_i}.$$

En confrontant (1.8) à (B.1), on voit qu'il suffit de prendre

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sum_j v_{1j}} \text{ et } \hat{\boldsymbol{\kappa}} = \lambda_1 \left(\sum_j v_{1j} \right) \mathbf{u}_1$$

en supposant $\sum_j v_{1j} \neq 0$. Nous constatons que la contrainte (1.6) est satisfaite par les $\hat{\boldsymbol{\beta}}_x$. Montrons que les $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_t$ satisfont aux aussi la contrainte (1.6). Notons $\bar{\mathbf{u}}_1$ le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à $\frac{1}{t_{\max} - t_{\min} + 1} \sum_j u_{1j}$ et réécrivons $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\kappa}} &= \left(\frac{1 - \bar{\mathbf{u}}_1^t \mathbf{u}_1}{1 - \bar{\mathbf{u}}_1^t \mathbf{u}_1} \right) \cdot \lambda_1 \cdot \left(\sum_j v_{1j} \right) \mathbf{u}_1 \\ (\text{par orthogonalité}) &= \left(\frac{\lambda_1 \sum_j v_{1j}}{1 - \bar{\mathbf{u}}_1^t \mathbf{u}_1} \right) \cdot (\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1) \\ &= \text{constante} \cdot (\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1) \end{aligned}$$

en supposant que

$$\bar{\mathbf{u}}_1^t \mathbf{u}_1 \neq 1.$$

Nous en concluons donc que la contrainte (1.6) est également satisfaite par les $\hat{\boldsymbol{\kappa}}_t$.

Annexe C

Comparaison des scénarios

C.1 Nombre de pensions

Année	Scénario 1			Scénario 2			Scénario 3		
	Retraites	Survies	Total	Retraites	Survies	Total	Retraites	Survies	Total
2000	48.783	7.268	56.051	48.841	7.178	56.019	48.974	7.108	56.082
2001	50.226	7.446	57.672	50.356	7.264	57.620	50.588	7.163	57.751
2002	51.901	7.636	59.537	52.084	7.356	59.440	52.470	7.172	59.642
2003	53.945	7.785	61.730	54.242	7.420	61.662	54.692	7.227	61.919
2004	56.145	7.935	64.080	56.479	7.524	64.003	57.065	7.244	64.309
2005	58.304	8.060	66.364	58.677	7.642	66.319	59.383	7.297	66.680
2006	60.525	8.206	68.731	60.970	7.699	68.669	61.796	7.337	69.133
2007	62.910	8.337	71.247	63.434	7.756	71.190	64.363	7.398	71.761
2008	65.032	8.440	73.472	65.623	7.840	73.463	66.626	7.452	74.078
2009	66.965	8.579	75.544	67.608	7.905	75.513	68.706	7.502	76.208
2010	68.687	8.700	77.387	69.388	8.007	77.395	70.600	7.540	78.140
2011	70.065	8.782	78.847	70.817	8.080	78.897	72.133	7.568	79.701
2012	71.400	8.905	80.305	72.236	8.129	80.365	73.632	7.618	81.250
2013	72.677	9.035	81.712	73.576	8.219	81.795	75.064	7.697	82.761
2014	74.035	9.141	83.176	74.990	8.295	83.285	76.550	7.715	84.265
2015	75.294	9.281	84.575	76.340	8.410	84.750	77.987	7.761	85.748
2016	76.509	9.377	85.886	77.598	8.493	86.091	79.316	7.831	87.147
2017	77.527	9.492	87.019	78.665	8.575	87.240	80.453	7.888	88.341
2018	78.448	9.617	88.065	79.596	8.699	88.295	81.478	7.961	89.439
2019	79.336	9.740	89.076	80.548	8.815	89.363	82.490	8.051	90.541
2020	80.107	9.869	89.976	81.366	8.902	90.268	83.371	8.149	91.520
2021	80.818	10.027	90.845	82.127	9.032	91.159	84.166	8.220	92.386
2022	81.672	10.119	91.791	83.009	9.096	92.105	85.074	8.315	93.389
2023	82.422	10.250	92.672	83.759	9.184	92.943	85.888	8.379	94.267
2024	83.300	10.378	93.678	84.658	9.281	93.939	86.845	8.463	95.308
2025	84.071	10.496	94.567	85.439	9.370	94.809	87.697	8.531	96.228
2026	84.878	10.566	95.444	86.239	9.425	95.664	88.524	8.575	97.099
2027	85.703	10.641	96.344	87.044	9.494	96.538	89.365	8.617	97.982
2028	86.594	10.685	97.279	87.917	9.572	97.489	90.267	8.643	98.910
2029	87.515	10.770	98.285	88.846	9.622	98.468	91.230	8.670	99.900
2030	88.523	10.799	99.322	89.839	9.641	99.480	92.230	8.706	100.936
2031	89.771	10.806	100.577	91.081	9.665	100.746	93.467	8.720	102.187
2032	90.986	10.795	101.781	92.267	9.662	101.929	94.661	8.718	103.379
2033	92.260	10.758	103.018	93.530	9.626	103.156	95.902	8.709	104.611
2034	93.513	10.734	104.247	94.757	9.559	104.316	97.119	8.719	105.838
2035	94.862	10.692	105.554	96.067	9.518	105.585	98.421	8.667	107.088
2036	96.217	10.641	106.858	97.390	9.474	106.864	99.737	8.620	108.357
2037	97.512	10.551	108.063	98.662	9.393	108.055	100.988	8.528	109.516
2038	98.686	10.467	109.153	99.813	9.293	109.106	102.120	8.464	110.584
2039	99.792	10.370	110.162	100.900	9.174	110.074	103.191	8.393	111.584
2040	100.753	10.273	111.026	101.838	9.054	110.892	104.105	8.291	112.396
2041	101.561	10.160	111.721	102.626	8.973	111.599	104.866	8.182	113.048
2042	102.311	10.076	112.387	103.364	8.874	112.238	105.577	8.065	113.642
2043	103.042	9.985	113.027	104.090	8.744	112.834	106.272	7.968	114.240
2044	103.706	9.863	113.569	104.746	8.630	113.376	106.903	7.894	114.797
2045	104.340	9.767	114.107	105.376	8.518	113.894	107.509	7.783	115.292
2046	105.032	9.658	114.690	106.063	8.434	114.497	108.182	7.665	115.847
2047	105.782	9.549	115.331	106.811	8.341	115.152	108.927	7.609	116.536
2048	106.477	9.451	115.928	107.503	8.273	115.776	109.612	7.537	117.149
2049	107.198	9.412	116.610	108.221	8.217	116.438	110.326	7.482	117.808
2050	107.943	9.375	117.318	108.967	8.166	117.133	111.063	7.435	118.498

C.2 Montant des pensions (millions d'euros)

Année	Scénario 1			Scénario 2			Scénario 3		
	Retraites	Survies	Total	Retraites	Survies	Total	Retraites	Survies	Total
2000	38,598	3,314	41,911	38,651	3,264	41,915	38,769	3,232	42,001
2001	40,977	3,485	44,462	41,093	3,382	44,475	41,298	3,327	44,625
2002	43,464	3,631	47,095	43,614	3,485	47,098	43,924	3,384	47,308
2003	46,435	3,760	50,195	46,670	3,582	50,252	47,029	3,453	50,482
2004	49,679	3,897	53,575	49,947	3,685	53,632	50,431	3,511	53,942
2005	52,861	4,028	56,888	53,227	3,809	57,036	53,798	3,619	57,417
2006	56,211	4,176	60,387	56,661	3,906	60,567	57,336	3,685	61,022
2007	59,905	4,323	64,228	60,416	3,993	64,409	61,252	3,770	65,022
2008	63,419	4,452	67,871	64,000	4,118	68,118	64,918	3,883	68,801
2009	66,753	4,632	71,384	67,407	4,239	71,646	68,459	3,972	72,431
2010	69,949	4,803	74,752	70,693	4,367	75,059	71,807	4,082	75,889
2011	72,711	4,965	77,676	73,572	4,505	78,078	74,814	4,175	78,989
2012	75,555	5,127	80,682	76,507	4,643	81,150	77,871	4,313	82,184
2013	78,416	5,290	83,706	79,425	4,784	84,209	80,934	4,442	85,377
2014	81,316	5,492	86,808	82,427	4,923	87,350	84,046	4,547	88,593
2015	84,211	5,685	89,896	85,418	5,113	90,531	87,164	4,681	91,845
2016	87,037	5,880	92,917	88,340	5,295	93,634	90,157	4,820	94,977
2017	89,627	6,090	95,717	91,051	5,467	96,519	92,986	4,962	97,948
2018	92,099	6,323	98,422	93,571	5,673	99,245	95,674	5,127	100,802
2019	94,549	6,536	101,084	96,173	5,876	102,049	98,393	5,312	103,705
2020	96,888	6,788	103,676	98,576	6,059	104,635	100,969	5,473	106,442
2021	99,017	7,031	106,048	100,802	6,269	107,071	103,323	5,637	108,960
2022	101,337	7,260	108,597	103,229	6,439	109,668	105,861	5,833	111,694
2023	103,584	7,518	111,103	105,525	6,631	112,157	108,292	6,009	114,301
2024	105,920	7,771	113,691	107,948	6,830	114,777	110,846	6,169	117,015
2025	108,126	8,036	116,163	110,208	7,043	117,251	113,175	6,377	119,552
2026	110,374	8,242	118,615	112,514	7,224	119,738	115,536	6,537	122,073
2027	112,720	8,444	121,164	114,808	7,392	122,200	118,030	6,667	124,698
2028	115,174	8,597	123,771	117,217	7,601	124,817	120,559	6,815	127,374
2029	117,637	8,831	126,467	119,658	7,772	127,430	123,132	6,945	130,077
2030	120,316	9,013	129,330	122,258	7,919	130,177	125,844	7,089	132,932
2031	123,246	9,120	132,366	125,176	8,049	133,226	128,811	7,227	136,037
2032	126,151	9,268	135,419	128,130	8,167	136,298	131,708	7,319	139,026
2033	129,268	9,366	138,634	131,208	8,259	139,467	134,849	7,409	142,258
2034	132,352	9,485	141,837	134,230	8,290	142,520	137,971	7,503	145,474
2035	135,695	9,547	145,242	137,536	8,374	145,910	141,258	7,538	148,797
2036	139,033	9,642	148,676	140,903	8,448	149,350	144,605	7,617	152,222
2037	142,370	9,663	152,034	144,194	8,478	152,672	147,914	7,639	155,552
2038	145,614	9,716	155,330	147,404	8,487	155,892	151,119	7,661	158,780
2039	148,895	9,736	158,631	150,558	8,444	159,001	154,366	7,686	162,052
2040	151,971	9,740	161,710	153,633	8,421	162,053	157,439	7,676	165,116
2041	154,876	9,717	164,592	156,555	8,474	165,029	160,304	7,672	167,976
2042	157,815	9,712	167,527	159,375	8,428	167,804	163,185	7,606	170,791
2043	160,747	9,713	170,460	162,344	8,409	170,753	166,021	7,622	173,642
2044	163,659	9,685	173,344	165,203	8,350	173,554	168,927	7,610	176,537
2045	166,512	9,654	176,166	168,125	8,304	176,429	171,779	7,568	179,348
2046	169,525	9,622	179,148	171,271	8,315	179,586	174,916	7,484	182,400
2047	172,921	9,550	182,470	174,642	8,269	182,911	178,283	7,478	185,760
2048	176,159	9,567	185,726	177,908	8,270	186,178	181,617	7,447	189,063
2049	179,618	9,594	189,212	181,304	8,300	189,604	185,011	7,457	192,468
2050	183,191	9,605	192,796	184,808	8,303	193,111	188,540	7,462	196,002

Annexe D

Taux de cotisation

Année	Aggregate Cost Method			Répartition		
	Retraites	Survies	Total	Retraites	Survies	Total
2000	58,56%	6,49%	65,04%	35,27%	11,57%	46,84%
2001	58,79%	6,39%	65,18%	34,90%	11,52%	46,43%
2002	59,04%	6,29%	65,33%	34,80%	11,45%	46,25%
2003	59,31%	6,19%	65,49%	34,86%	11,41%	46,28%
2004	59,62%	6,11%	65,73%	35,12%	11,31%	46,43%
2005	59,96%	6,06%	66,02%	35,70%	11,22%	46,91%
2006	60,46%	5,99%	66,44%	36,48%	11,14%	47,62%
2007	60,99%	5,96%	66,95%	37,51%	11,02%	48,52%
2008	61,68%	5,90%	67,57%	38,80%	10,97%	49,77%
2009	62,28%	5,84%	68,12%	40,32%	10,82%	51,13%
2010	62,77%	5,83%	68,61%	42,20%	10,71%	52,91%
2011	63,40%	5,76%	69,16%	44,75%	10,52%	55,27%
2012	63,89%	5,69%	69,59%	47,62%	10,42%	58,04%
2013	64,38%	5,65%	70,03%	50,39%	10,23%	60,61%
2014	64,84%	5,61%	70,44%	53,25%	10,07%	63,33%
2015	65,28%	5,58%	70,86%	56,16%	9,95%	66,11%
2016	65,62%	5,52%	71,14%	59,13%	9,78%	68,91%
2017	65,83%	5,47%	71,30%	61,87%	9,59%	71,46%
2018	65,98%	5,43%	71,41%	64,49%	9,38%	73,87%
2019	66,07%	5,46%	71,53%	66,93%	9,21%	76,13%
2020	66,22%	5,39%	71,61%	69,07%	9,02%	78,09%